APOSTILA ZERO

ASSUNTOS BÁSICOS
APOSTILA ZERO

MATEMÁTICA
José Carlos Teixeira

GEOGRAFIA
Reinaldo Scalzaretto

7ª Edição

MATEMÁTICA

Olá

Você agora é aluno do Anglo. Assumiremos, logo no início, um compromisso: nós, o de prepará-lo da melhor maneira possível, e você, o de corresponder a essa preparação. A nossa finalidade é uma só: *que você consiga entrar na faculdade que escolheu.*

No vestibular você vai encontrar questões já conhecidas, mas também questões novas. Por isso, enquanto desenvolvemos todo o programa exigido, procuraremos, num esforço conjunto, elevar ao máximo a sua *capacidade de utilizar o seu potencial intelectual e emocional.* Essa capacidade nada mais é do que a sua aptidão para adquirir novos conhecimentos e, paralelamente, estabelecer relações, organizar idéias, interpretar dados e, quando solicitado, expressar tudo isso com muita clareza.

Esta APOSTILA ZERO contém ensinamentos indispensáveis para a boa compreensão do curso que vamos desenvolver. Reúne assunto de Matemática e Geografia, que constam dos programas do 1º grau.

Colocamos como meta que você entre no Anglo, no primeiro dia de aula, tendo resolvido todas as questões propostas nesta APOSTILA ZERO. No entanto, se você se matriculou em cima da hora, não leve mais do que duas semanas para realizar essa tarefa.

É importante entrar numa boa faculdade com base para acompanhar o estudo da carreira escolhida. Temos muita consciência disso e é por isso que afirmamos: ***as melhores faculdades começam no Anglo.***

Nicolau Marmo
Coordenador Geral

1 Números Inteiros — Expressões

SÉRIE I

Calcular: *1)* $4 + 5 \times 8 =$ *2)* $7 + 2 \times 6 =$ *3)* $3 + 6 \times 1 =$ *4)* $11 + 4 \times 3 =$

Exemplo: $7 + 3 \times 5 =$

1º passo: $7 + \boxed{3 \times 5} = 7 + 15$

2º passo: $7 + 15 = 22$

SÉRIE II

Calcular: *1)* $31 - 15 \times 2 =$ *2)* $19 + 18 : 2 =$ *3)* $27 - 32 : 4 =$ *4)* $36 - 28 : 7 =$

Exemplo: $16 - 4 \times 3 =$

1º passo: $16 - \boxed{4 \times 3} = 16 - 12$

2º passo: $16 - 12 = 4$

SÉRIE III

Calcular: *1)* $6 \times 4 + 3 \times 7 =$
2) $18 : 6 - 14 : 7 =$
3) $24 : 4 + 1 \times 4 =$
4) $8 \times 6 - 72 : 8 =$

Exemplo: $7 \times 5 - 18 : 2 =$

1º passo: $\boxed{7 \times 5} - \boxed{18 : 2} = 35 - 9$

2º passo: $35 - 9 = 26$

SÉRIE IV

Calcular: *1)* $5 \times (7 + 4) + 3 \times 2 =$
2) $7 \times (8 : 4) - 4 \times 3 =$
3) $(8 - 3) \times 4 + 18 : (5 - 2) =$
4) $(3 + 9) : 3 - 4 : (7 - 5) =$

Exemplo: $7 \times (5 + 3) - 24 : 6 =$

1º passo: $7 \times \boxed{(5 + 3)} - \boxed{24 : 6} = 7 \times 8 - 4$

2º passo: $\boxed{7 \times 8} - 4 = 56 - 4$

3º passo: $56 - 4 = 52$

SÉRIE V

Efetuar: *1)* $(+2) \times (+5) =$
2) $(+1) \times (+6)$
3) $(+7) \times (+3) =$
4) $(+4) \times (+9) =$

Exemplo: $(+3) \times (+4) =$
$(+3) \times (+4) = +12$

SÉRIE VI

Efetuar: *1)* $(-2) \times (+3) =$ *2)* $(+3) \times (-4) =$ *3)* $(-7) \times (+4) =$ *4)* $(-1) \times (+5) =$

Exemplo: $(-3) \times (+4) =$
$(-3) \times (+4) = -12$

SÉRIE VII

Efetuar: *1)* $(-2) \times (-3) =$ *2)* $(-3) \times (-5) =$ *3)* $(-5) \times (-7) =$ *4)* $(-1) \times (-8) =$

Exemplo: $(-3) \times (-4)$
$(-3) \times (-4) = +12$

SÉRIE VIII

Efetuar: *1)* $(+15) : (+3) =$ *2)* $(+24) : (+4) =$ *3)* $(+36) : (+12) =$ *4)* $(+18) : (+3) =$

Exemplo: $(+8) : (+2)$
$(+8) : (+2) = +4$

SÉRIE IX

Efetuar: *1)* $(+15) : (-3) =$ *2)* $(-12) : (+4) =$ *3)* $(-16) : (+8) =$ *4)* $(+3) : (-1) =$

Exemplo: $(+12) : (-4) =$
$(+12) : (-4) = -3$

SÉRIE X

Efetuar: *1)* $(-14) : (-7) =$ *2)* $(-26) : (-2) =$ *3)* $(-18) : (-9) =$ *4)* $(-7) : (-1) =$

Exemplo: $(-12) : (-3) =$
$(-12) : (-3) = +4$

SÉRIE XI

Efetuar: *1)* $(+12) \times (-4) : (-6) =$
2) $(-18) : (+9) \times (+5) =$
3) $(-24) : (+8) \times (-3) : (-1) =$
4) $(+7) \times (-6) : (+14) \times (-1) =$

Exemplo: $(+8) \times (-3) : (+4) =$

1º passo: $(+8) \times (-3) : (+4) = (-24) : (+4)$

2º passo: $(-24) : (+4) = -6$

SÉRIE XII

Calcular: *1)* $2^3 =$ *2)* $3^2 =$ *3)* $2^4 =$ *4)* $7^2 =$ *5)* $2^7 =$ *6)* $10^2 =$ *7)* $1^5 =$ *8)* $10^3 =$

Exemplo: $3^4 =$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

SÉRIE XIII

Calcular: *1)* $(-3)^2 =$ *2)* $(-5)^2 =$ *3)* $(-3)^4 =$ *4)* $(-1)^6 =$

Exemplo: $(-2)^4 =$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

SÉRIE XIV

Calcular: *1)* $(-2)^5 =$ *2)* $(-3)^3 =$ *3)* $(-5)^3 =$ *4)* $(-1)^7 =$

Exemplo: $(-2)^3 =$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

SÉRIE XV

Calcular: *1)* $10^2 =$ *2)* $10^3 =$ *3)* $10^5 =$ *4)* $10^6 =$

Exemplo: $10^4 =$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

SÉRIE XVI

Escrever em forma de potência de base 10:

1) 1 000 000 =
2) 10 000 000 =
3) 100 000 000 =
4) 1 000 000 000 =

Exemplo: 100 000 =

$$\underbrace{100\,000}_{\text{5 zeros}} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{5 fatores iguais a 10}} = 10^5$$

SÉRIE XVII

Calcular: *1)* $-3^2 =$ *2)* $-2^3 =$ *3)* $-1^5 =$ *4)* $-1^6 =$

Exemplo: $-2^4 =$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -(16) = -16$$

SÉRIE XVIII

Calcular: *1)* $\sqrt{4} =$ *2)* $\sqrt{9} =$ *3)* $\sqrt{16} =$ *4)* $\sqrt{36} =$ *5)* $\sqrt{49} =$ *6)* $\sqrt{81} =$ *7)* $\sqrt{100} =$ *8)* $\sqrt{121} =$ *9)* $\sqrt{144} =$ *10)* $\sqrt{169} =$ *11)* $\sqrt{196} =$ *12)* $\sqrt{225} =$

Exemplo: $\sqrt{25} =$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

SÉRIE XIX

Calcular: *1)* $\sqrt[3]{27} =$ *2)* $\sqrt[3]{64} =$ *3)* $\sqrt[3]{125} =$ *4)* $\sqrt[3]{1000} =$

Exemplo: $\sqrt[3]{8} =$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

SÉRIE XX

Exemplo: Extrair a raiz quadrada do número: 140 625

Algoritmo (dispositivo prático)

1º passo: Separa-se o radicando da direita para a esquerda, em grupos de dois algarismos, sendo que o último grupo à esquerda poderá ter apenas um algarismo. Temos:

$$\sqrt{14.06.25}$$

2º passo: Extrai-se a raiz quadrada exata, ou com aproximação de uma unidade por falta (= a raiz do maior quadrado perfeito contido nesse número), do primeiro grupo à esquerda, e teremos então o primeiro algarismo da raiz. Assim, para $\sqrt{14}$ toma-se 3 (o maior quadrado contido em 14 é 9), e indicamos à direita do radicando.

$$\sqrt{14.06.25} \;\; | \; 3$$

3º passo: Subtrai-se do primeiro grupo à esquerda do radicando (14) o quadrado do primeiro algarismo da raiz ($3^2 = 9$), obtendo o primeiro resto ($14 - 9 = 5$). Temos:

$$\sqrt{14.06.25} \;\; | \; 3$$
$$-9$$
1º resto... 5

4º passo: À direita do primeiro resto (5) abaixa-se o segundo grupo (06), do qual se separa o último algarismo à direita (6). Assim:

```
          √14.06.25 | 3
            -9      |
1º resto...  50.6
```

5º passo: Dobra-se a raiz obtida ($2 \times 3 = 6$) e escreve-se abaixo da raiz (3). Assim:

```
          √14.06.25 | 3
            -9      | 6
1º resto...  50.6
```

6º passo: Divide-se o número formado pelos algarismos à esquerda do resto (50) pelo dobro da raiz achada (6), e este quociente se escreve à direita do dobro da raiz e será o segundo algarismo da raiz, ou um número *grande demais*. Verifica-se esse algarismo, multiplicando-se o número formado (68) por esse mesmo algarismo (8). Se esse produto for menor ou igual ao número formado pelo resto seguido do 2º grupo, o algarismo será exato, em caso contrário, deverá ser diminuído de 1, 2, ... unidades, até que a subtração dê diferença não negativa.

```
          √14.06.25 | 3
            -9      | 67 × 7 = 469
1º resto...  50.6
            -469
2º resto...   37
```

No caso, 50:6 dá quociente 8, que é forte, pois $68 \times 8 = 544$, produto este maior que 506, então experimentemos 7, $67 \times 7 = 469$, cuja subtração é possível. Assim 7 é o segundo algarismo da raiz.

7º passo: À direita do 2º resto abaixa-se o 3º grupo e separamos o último algarismo (5). Assim:

```
          √14.06.25 | 37
            -9      | 67 × 7 = 469
1º resto...  50.6
            -469
2º resto...   372.5
```

8º passo: Repetimos o 5º, 6º e 7º passos e assim sucessivamente, até que se tenham abaixado todos os grupos do radicando. Não havendo resto, a raiz será exata; em caso contrário, a raiz será aproximada com erro inferior a uma unidade por falta.

```
          √14.06.25 | 375
            -9      | 67 × 7 = 469
             50.6   |
1º resto... -469    | 745 × 5 = 3725
              372.5
2º resto...  -372.5
                0
```

Portanto, $\sqrt{140625} = 375$

Observações

1ª) A raiz quadrada de um número inteiro terá tantos algarismos quantos forem os grupos no radicando.

2ª) Se depois de abaixar um grupo e separar o último algarismo à direita, o número resultante à esquerda for menor do que o dobro da raiz, o algarismo que na raiz corresponde a esse grupo será *zero*; abaixa-se o grupo seguinte e continua-se a operação. Exemplo:

```
√1.16.64 | 1              √1.16.64 | 108
 -1      | 2      →        -1      | 208 × 8 = 1664
 01.6                      01.66.4
 1 < 2                    - 1.66.4
                               0
```

Exercícios

Extrair a raiz quadrada dos seguintes números:

1) 190 969 =
2) 24 336 =
3) 232 324 =
4) 41 209 =

SÉRIE XXI

Extrair a raiz quadrada do número 23 618 com erro inferior a 0,1 ou 1/10.

1) 45 263 =
2) 62 418 =
3) 16 957 =
4) 40 245 =

Exemplo:

***1º passo:* Acrescentamos dois zeros ao radicando:**

$$\sqrt{2361800}$$

***2º passo:* Extrair a raiz quadrada:**

```
√2.36.18.00 | 1 536
            | 25 × 5 = 125
 -1         |
            | 303 × 3 = 909
  13.6      |
-  12 5     |
            | 3 066 × 6 = 18 396
  01 11.8
-     90 9
  0 2090.0
-   1839.6
     250 4
```

3º passo: **Dividimos o resultado pelo denominador da fração que indicar a aproximação, no caso 10. Assim temos:**

$$\sqrt{23618} = 153{,}6 \text{ (erro inferior a 0,1)}$$

SÉRIE XXII

Extrair a raiz quadrada dos seguintes números com erro inferior a 0,01.

1) 2 459 =
2) 3 642 =
3) 15 692 =
4) 11 674 =

Exemplo: 17478

1º passo: **Acrescentamos quatro zeros ao radicando:**

$$\sqrt{174780000}$$

2º passo: **Extrair a raiz quadrada:**

$\sqrt{1.74.78.00.00}$	**13220**
	23 × 3 = 69
− 1	**262 × 2 = 524**
07.4	**2642 × 2 = 5284**
− 6 9	**2644**
57.8	
− 52 4	
5 40.0	
− 5 28 4	**Nota:** $1160 < 2644$
11 60.0	

3º passo: **Dividir o resultado 13220 por 100 e daí:**

$$\sqrt{17478} = 132{,}20 \text{ (erro inferior a 0,01)}$$

> **Sugestão:** Extrair a raiz quadrada nos exercícios anteriores com erro inferior a 0,001.

2 Números Fracionários — Expressões Numéricas

SÉRIE I

Simplificar: *1)* $\frac{8}{24} =$ *2)* $\frac{21}{28} =$ *3)* $\frac{32}{40} =$ *4)* $\frac{48}{84} =$

Exemplo: (m.d.c. significa *máximo divisor comum*)

1º passo: **m.d.c. (12,20) = 4**

2º passo: $\mathbf{\frac{12}{20} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}}$

SÉRIE II

Escrever em forma de fração mista:

1) $\frac{31}{5} =$

2) $\frac{24}{7} =$

3) $\frac{23}{5} =$

4) $\frac{41}{9} =$

Exemplo: $\mathbf{\frac{13}{4} =}$

1º passo: $\frac{13}{4} = 13 : 4$ **ou**

2º passo: $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$

SÉRIE III

Escrever em forma de fração:

1) $3\frac{5}{6} =$

2) $1\frac{4}{7} =$

3) $2\frac{1}{3} =$

4) $7\frac{1}{2} =$

Exemplo: $4\frac{1}{9}$

$$4\frac{1}{9} = \frac{9 \times 4 + 1}{9} = \frac{36 + 1}{9} = \frac{37}{9}$$

SÉRIE IV

Efetuar: *1)* $\frac{7}{13} + \frac{10}{13} =$

2) $\frac{9}{11} + \frac{10}{11} =$

3) $2\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$

4) $1\frac{3}{10} + 2\frac{9}{10} =$

Exemplo: $\mathbf{\frac{3}{7} + \frac{6}{7} =}$

$$\mathbf{\frac{3}{7} + \frac{6}{7} = \frac{3 + 6}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}}$$

SÉRIE V

Efetuar: *1)* $\frac{8}{15} - \frac{2}{15} =$

2) $\frac{10}{3} - 2\frac{1}{3} =$

3) $5\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6} =$

4) $2\frac{3}{7} - 1\frac{1}{7} =$

Exemplo: $\mathbf{3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} =}$

$$\mathbf{3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{13}{4} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}}$$

SÉRIE VI

Efetuar: *1)* $\frac{8}{13} + \frac{10}{13} - \frac{7}{13} =$

2) $1\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$

3) $\frac{19}{7} - \frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$

4) $1\frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} =$

Exemplo: $\mathbf{\frac{6}{11} + \frac{8}{11} - \frac{5}{11} =}$

$$\mathbf{\frac{6}{11} + \frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{6 + 8 - 5}{11} = \frac{9}{11}}$$

SÉRIE VII

Efetuar: *1)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$

2) $3\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=$

3) $2+\frac{1}{4}=$

4) $1+\frac{3}{7}=$

Exemplo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$ (m.m.c. significa *mínimo multiplo comum*)

1º passo: **m.m.c. (3,4) = 12**

2º passo: **reduzir as frações ao mesmo denominador:**

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$$

3º passo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$

SÉRIE VIII

Efetuar: *1)* $4-\frac{1}{7}=$

2) $1\frac{3}{5}-\frac{2}{3}=$

3) $3\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}=$

4) $1\frac{3}{7}-\frac{4}{5}=$

Exemplo: $3-\frac{2}{5}=$

$$3-\frac{2}{5}=\frac{3}{1}-\frac{2}{5}=\frac{45}{15}-\frac{6}{15}=$$

$$=\frac{39}{15}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$$

SÉRIE IX

Efetuar: *1)* $1\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{7}{15}=$

2) $2\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=$

3) $3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=$

4) $1\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}-\frac{11}{12}=$

Exemplo: $2\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=$

$$2\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{28}{12}+\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=$$

$$=\frac{28+3+10}{12}=\frac{41}{12}=3\frac{5}{12}$$

SÉRIE X

Efetuar: *1)* $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=$

2) $1\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}=$

3) $1\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=$

4) $2\frac{3}{7}\times\frac{4}{17}=$

Exemplo: $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

SÉRIE XI

Efetuar: *1)* $\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}\times\frac{14}{3}=$

2) $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times1\frac{2}{3}=$

3) $\frac{3}{4}\times4\frac{1}{5}\times\frac{5}{14}=$

4) $1\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}\times1\frac{3}{4}=$

Exemplo: $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{8}{5}=$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{2\times1\times\cancel{8}^{2}}{3\times{}_{1}\cancel{4}\times5}=\frac{4}{15}$$

SÉRIE XII

Efetuar: *1)* $\frac{2}{3}$ de 15 =

2) $\frac{1}{3}$ de 6 =

3) $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}=$

4) $\frac{1}{3}$ de $\frac{6}{7}=$

Exemplo: $\frac{4}{5}$ **de 30**

1º passo: $\frac{4}{5}$ **de 30 significa** $\frac{4}{5}\times30$

2º passo: $\frac{4}{5}\times30=\frac{4}{{}_{1}\cancel{5}}\times\cancel{30}^{6}=24$

SÉRIE XIII

Efetuar: *1)* $\frac{7}{9}:\frac{14}{3}=$

2) $\frac{3}{4}:\frac{3}{8}=$

3) $2:\frac{4}{5}=$

4) $\frac{4}{5}:2=$

Exemplo: $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=$

1º passo: $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$

2º passo: $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

SÉRIE XIV

Calcular: *1)* $\frac{4}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} =$ *3)* $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} : 2 =$

2) $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} : \frac{3}{10} =$ *4)* $\frac{3}{7} : \frac{3}{14} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} =$

Exemplo: $1\frac{3}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{9} =$

$$1\frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{4} + \frac{\not{3}^1}{{}_1\not{7}} \times \frac{\not{7}^1}{{}_3\not{9}} = \frac{7}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{21}{12} + \frac{4}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$$

SÉRIE XV

Calcular: *1)* $\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$ *3)* $\left(\frac{1}{5}\right)^3 =$

2) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 =$ *4)* $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

SÉRIE XVI

Calcular: *1)* $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$ *3)* $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 =$

2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$ *4)* $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 =$

Exemplo: $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$$

SÉRIE XVII

Calcular: *1)* $2^{-3} =$ *3)* $3^{-3} =$

2) $5^{-2} =$ *4)* $10^{-2} =$

Exemplo: $3^{-2} =$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

SÉRIE XVIII

Calcular: *1)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$ *3)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} =$ *4)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = 1 : \frac{4}{9} = 1 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

SÉRIE XIX

Calcular: *1)* $\sqrt{\frac{9}{16}} =$ *3)* $\sqrt{\frac{81}{100}} =$

2) $\sqrt{\frac{1}{25}} =$ *4)* $\sqrt{\frac{49}{100}} =$

Exemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}} =$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

SÉRIE XX

Racionalizar:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}} =$ *3)* $\frac{8}{\sqrt{2}} =$

2) $\frac{10}{\sqrt{5}} =$ *4)* $\frac{3}{\sqrt{7}} =$

Exemplo: $\frac{3}{\sqrt{2}} =$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3 Frações e Números Decimais

SÉRIE I

Transformar cada fração decimal em número decimal:

1) $\frac{7}{100} =$ 3) $\frac{17}{100} =$

2) $\frac{13}{1000} =$ 4) $\frac{31}{10} =$

Exemplo: $\frac{37}{1000} =$

$\frac{37}{1000} = 0,037$

fração decimal: $\frac{3}{10}$

número decimal: 0,3

SÉRIE II

Transformar cada número decimal em fração decimal:

1) 0,003 = 3) 0,0101 =

2) 2,0017 = 4) 2,17 =

Exemplo: 0,0731 =

$0,0731 = \frac{731}{10\,000}$

SÉRIE III

Transformar cada fração em fração decimal:

1) $\frac{7}{4} =$ 3) $\frac{71}{125} =$

2) $\frac{13}{25} =$ 4) $\frac{1}{20} =$

Exemplo: $\frac{3}{5} =$

$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{100}$

SÉRIE IV

Achar a fração geratriz de cada dízima periódica:

1) 0,555... = 3) 0,222... =

2) 0,333... = 4) 0,666... =

Exemplo: 0,777...

$0,777\ldots = \frac{7}{9}$

SÉRIE V

Achar a fração geratriz de cada dízima periódica:

1) 1,555... = 3) 3,222... =

2) 2,333... = 4) 1,666... =

Exemplo: 2,777... =

$2,777\ldots = 2 + 0,777 = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$

SÉRIE VI

Achar a fração geratriz de cada dízima periódica:

1) 0, 38 38 38... =

2) 1, 23 23 23... =

3) 0, 182 182 182... =

4) 2, 105 105 105... =

Exemplo: 0,72 72 72...

$0,72\ 72\ 72\ldots = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

SÉRIE VII

Escrever na forma de número decimal:

1) $10^{-2} =$

2) $10^{-4} =$

3) $10^{-5} =$

4) $10^{-6} =$

Exemplo: $10^{-3} =$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

SÉRIE VIII

Escrever na forma de potência de base 10:

1) 0,000001 =

2) 0,0000001 =

3) 0,00000001 =

4) 0,000000001 =

Exemplo: 0,00001 =

$0,00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

SÉRIE IX

Efetuar: *1)* 7,3 + 18 + 0,03 + 0,0002 =
2) 0,0612 + 7,48 + 0,00039 =
3) 0,731 + 0,01 + 17 =
4) (372,001 – 298,03) + 0,0018 =

Exemplo: 3,0049 + 1,76 + 0,003 =

Algoritmo:

```
3,0049 \
1,7600  } (+)
0,0030 /
------
4,7679
```

SÉRIE X

Efetuar: *1)* $6,481 \times 1,78 =$
2) $0,703 \times 1,003 =$
3) $0,00179 \times 0,31 =$
4) $2,7035 \times 0,006 \times 1,05 =$

Exemplo: $18,348 \times 0,34 =$

Algoritmo

```
   18,348
   × 0,34
   ------
   73 392
  550 44
  -------
  6,23832
```

SÉRIE XI

Calcular: *1)* $(0,7)^2 =$ *3)* $(0,04)^2 =$
2) $(0,013)^2 =$ *4)* $(0,003)^2 =$

Exemplo: $(0,012)^2 =$

$(0,012)^2 = 0,012 \times 0,012 = 0,000144$

SÉRIE XII

Exemplo: 87,932 : 35,6

1º passo: **Algoritmo** **87,932 | 35,6**

A parte inteira do dividendo é *maior* que a parte inteira do divisor.

2º passo: **Igualar as casas decimais e iniciar a operação.**

```
            87 932 | 35 600
1º resto →  16 732 | 2,
```

3º passo: **Colocar a vírgula à direita do quociente (2), acrescentar um zero à direita do 1º resto e continuar a operação.**

```
            87 932   | 35 600
            16 732 0 | 2,4
2º resto →  2 492 0
```

4º passo: **Acrescentar no 2º resto um zero à direita e continuar a operação.**

```
            87 932   | 35 600
            16 732 0 | 2,47
             2 492 00
3º resto →    000 00
```

quociente procurado = 2,47
resto = 0, a divisão é exata.

Exercícios

Efetuar: *1)* 40,392 : 26,4 = *3)* 1444,56 : 46,3 =
2) 15,75 : 12,6 = *4)* 0,9 : 0,72 =

SÉRIE XIII

Exemplo: 0,022413 : 0,723 =

1º passo: **Algoritmo**

```
0,022413 | 0,723
```

2º passo: **Igualar as casas decimais.**

```
224 13 | 723 000
```

3º passo: **O dividendo sendo menor que o divisor, colocamos um zero no quociente seguido de uma vírgula e acrescentamos um zero no dividendo.**

```
224 130 | 723 000
        | 0,
```

4º passo: **Se o dividendo ficar maior ou igual ao divisor, inicia-se a operação; caso contrário, acrescenta-se um zero ao quociente e ao divisor. (que é o nosso caso).**

```
2241 300 | 723 000
0723 000 | 0,031
 000 000 |
```

quociente procurado = 0,031
resto = 0, e a divisão é exata.

Exercícios

Efetuar: *1)* 0,0075 : 0,03 =
2) 0,0164 : 0,005 =
3) 1,28 : 80 =
4) 0,01125 :: 0,25 =

SÉRIE XIV

Efetuar cada divisão com erro inferior a 0,01:

1) 7,38 : 43 =
2) 0,731 : 0,08 =
3) 47 : 19 =
4) 0,6378 : 2,36 =

Exemplo: 1,8 : 13

1º passo: **1,8 | 13**

2º passo: **18 | 130** (igualar as casas decimais)

3º passo:

```
 180 | 130   (iniciar a operação)
0500 | 0,13
 110 |
```

quociente procurado = 0,13 (erro inferior a 0,01)

Erro inferior a 0,01 significa que o quociente deve possuir duas casas decimais!

SÉRIE XV

Efetuar cada divisão com erro inferior a 0,001:

1) 7,38 : 43 =

2) 0,731 : 0,08 =

3) 47 : 19 =

4) 0,6378 : 2,36 =

Exemplo: 1,8 : 13

```
 180  |130
0500  |0,138
 1100
  060
```

quociente procurado = 0,138 (erro inferior a 0,001)

SÉRIE XVI

Calcular: *1)* $\sqrt{0{,}0144} =$ *3)* $\sqrt{0{,}25} =$

2) $\sqrt{1{,}96} =$ *4)* $\sqrt{0{,}000121} =$

Exemplo: $\sqrt{0{,}09} =$

$$\sqrt{0{,}09} = \sqrt{(0{,}3)^2} = 0{,}3$$

SÉRIE XVII

Exercícios

Calcular com erro inferior a 0,01:

1) $\sqrt{0{,}9} =$

2) $\sqrt{0{,}036} =$

3) $\sqrt{0{,}025} =$

4) $\sqrt{0{,}144} =$

Exemplo: $\sqrt{0{,}4} =$

***1º passo:* *O radicando deve ficar com quatro casas* após a vírgula.**

$$\sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}4000}$$

***2º passo:* Extrair a raiz quadrada de $\sqrt{4000}$**

```
√40.00 | 63
 36    | 6 × 2 = 12
 040.0 | 123 × 3 = 369  |  40/12 ≈ 3
  369  |
  031  |
```

***3º passo:* A partir dos algarismos da direita (3) da raiz encontrada (63) contar *duas casas* para a esquerda e colocar a vírgula:**

$\sqrt{0{,}4} = 0{,}63$ **(com erro inferior a 0,01)**

4 Sistema Métrico Decimal

1. Unidades de comprimento

Unidade fundamental de comprimento: *metro* (símbolo: *m*).

■ **Múltiplos do metro**

Quilômetro (km) vale 1 000m = 10^3m
Hectômetro (hm) vale 100m = 10^2m
Decâmetro (dam) vale 10m = 10^1m

■ **Submúltiplos do metro**

Decímetro (dm) vale 0,1m = 10^{-1}m
Centímetro (cm) vale 0,01m = 10^{-2}m
Milímetro (mm) vale 0,001m = 10^{-3}m

■ **Mudança de unidades**

O número 764,8519m, por exemplo, pode ser escrito com unidades inferiores (submúltiplos) ou superiores (múltiplos) ao metro, com a simples mudança da posição da vírgula de *casa* em *casa*. Exemplos:

764,8591m = 7,648591 hm
= 76485,91 cm

SÉRIE I

Exprimir em metros:

1) 0,3752km =
2) 47,5hm =
3) 6,07dam =
4) 4,0385km =

Exemplo: 36,8km
36,8km = 36 800m

SÉRIE II

Exprimir em metros:

1) 463,78mm =
2) 0,38cm =
3) 39,45dm =
4) 0,5mm =

Exemplo: 5,72mm
5,72mm = 0,00572m

SÉRIE III

Completar as seguintes igualdades:

1) 34,1dm = ... dam
2) 0,6072hm = ... km
3) 17,83mm = ... m
4) 472cm = ... dam

Exemplo: 47,2m = ...hm
47,2m =0,472hm

SÉRIE IV

Completar as seguintes igualdades:

1) 0,00814km = ... dm
2) 16,4275m = ... cm
3) 72,78dam =... dm
4) 0,72dm = ... mm

Exemplo: 379,346dam =... cm
379,346dam = 379 346cm

SÉRIE V

Efetuar as seguintes operações referindo-se ao metro:

1) 23cm + 0,7mm + 1,42dm =
2) 7,314dm + 631,4mm + 0,82cm =
3) 83,42mm + 0,37dm + 0,01cm =

Exemplo: 4dm + 7,3cm + 136mm =
4dm = 0,400m
7,3cm = 0,073m
136mm = 0,136m
0,609m

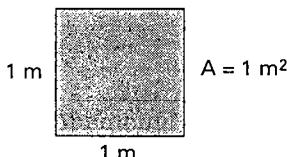
SÉRIE VI

Efetuar as seguintes operações referindo-se ao metro:

1) 0,0472km + 1,7dam + 0,138hm =
2) 2,48hm + 0,7321km + 36,712dam =
3) 10,07dam + 1,007km + 0,1007hm =
4) 8,6km + 2,47dam + 31,753hm =

Exemplo: 3,804dam + 0,731km + 0,17hm =
3,804dam = 38,04m
0,731km = 731,00m
0,17hm = 17,00m
786,04m

SÉRIE VII

Efetuar as seguintes operações referindo-se ao centímetro:

1) 573m – 7,8dam =
2) 1,07km – 0,873dam =
3) 46,4dm – 960,5mm =
4) 410,72mm – 0,00651dm =

Exemplo: **0,08783 km – 4,706 m =**

0,08783 km =	**8783,0 cm**
4,706 m =	**–470,6 cm**
	8312,4 cm

2. Unidades de área

Unidade fundamental de área: *metro quadrado,* símbolo: m^2. **Metro quadrado** é a área de um quadrado cujo lado tem o comprimento de um metro.

■ Múltiplos do metro quadrado

Quilômetro quadrado (km^2)	vale	1 000 000 m^2	= $10^6 m^2$
Hectômetro quadrado (hm^2)	vale	10 000 m^2	= $10^4 m^2$
Decâmetro quadrado (dam^2)	vale	100 m^2	= $10^2 m^2$

■ Submúltiplos do metro quadrado

Decímetro quadrado (dm^2)	vale	0,01 m^2	= $10^{-2} m^2$
Centímetro quadrado (cm^2)	vale	0,0001 m^2	= $10^{-4} m^2$
Milímetro quadrado (mm^2)	vale	0,000001 m^2	= $10^{-6} m^2$

■ Mudança de unidades

O número 743,487256 m^2, por exemplo, pode ser escrito com submúltiplos ou múltiplos do metro quadrado; para isto, basta transpor a vírgula *duas casas* para a esquerda ou para a direita, conforme reduzimos o número dado a unidades inferiores ou superiores. Exemplos:

$$743{,}487256\,m^2 = 7434872{,}56\,cm^2 = 0{,}0743487256\,hm^2$$

SÉRIE I

Exprimir em m^2:

1) 0,048 km^2 =
2) 13,07 dam^2 =
3) 3,102 hm^2 =
4) 42,30812 km^2 =

Exemplo: 0,8374 hm^2 =
0,8374 hm^2 = 8374 m^2

SÉRIE II

Exprimir em m^2:

1) 73,01 dm^2 =
2) 10964 cm^2 =
3) 674375 mm^2 =
4) 0,01 cm^2 =

Exemplo: 361,08 cm^2 =
361,08 cm^2 = 0,036108 m^2

SÉRIE III

Completar as seguintes igualdades:

1) 81,275 m^2 = ... cm^2
2) 0,0037619 dam^2 = ... dm^2
3) 3,01 km^2 = ... m^2
4) 0,00075 m^2 = ... mm^2

Exemplo: 27,031 km^2 = ... dam^2
27,031 km^2 = 270 310 dam^2

Medidas agrárias — Unidades empregadas na agrimensura (medidas da superfície de campos, florestas etc).

Unidade básica = are — símbolo: *a*

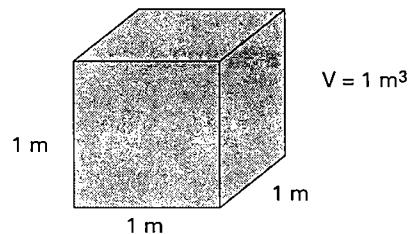
1a equivale a 100 m^2

■ **Múltiplo:** hectare (ha) vale 100 a = 10 000 m^2

■ **Submúltiplo:** centiare (ca) vale 0,01a = 1 m^2

Exemplos: 1. Exprimir em are:

a) 4,8 hm^2 = 48 000 m^2 = 480 a
b) 0,732 km^2 = 732 000 m^2 = 7 320 a

2. Exprimir em centiare:

a) 37.45 dam^2 = 3 745 m^2 = 3 745 ca
b) 0,0075 km^2 = 7 500 m^2 = 7 500 ca

3. Exprimir em hectare:

a) 12,72 hm^2 = 127 200 m^2 = 12,72 ha
b) 7,82 km^2 = 7 820 000 m^2 = 782 ha

3. Unidades de volume

Unidade fundamental de volume: metro cúbico — símbolo: m^3. **Metro cúbico** é o volume de um cubo cuja aresta tem o comprimento de um metro.

■ Múltiplos do metro cúbico

Quilômetro cúbico (km^3)	vale	1 000 000 000 m^3	= $10^9 m^3$
Hectômetro cúbico (hm^3)	vale	1 000 000 m^3	= $10^6 m^3$
Decâmetro cúbico (dam^3)	vale	1 000 m^3	= $10^3 m^3$

■ Submúltiplos do metro cúbico

Decímetro cúbico (dm^3)	vale	0,001 m^3	= $10^{-3} m^3$
Centímetro cúbico (cm^3)	vale	0,000001 m^3	= $10^{-6} m^3$
Milímetro cúbico (mm^3)	vale	0,000000001 m^3	= $10^{-9} m^3$

O número 79 384,70 368 m^3, por exemplo, pode ser escrito com submúltiplos ou múltiplos do metro cúbico; para isso, basta transportar a vírgula *três*

casas para a esquerda ou para a direita, conforme reduzimos o número dado a unidades inferiores ou superiores.

Exemplos: 79 384,70 368 m^3 = 79 384 703 680 cm^3
= 79,38470368 dam^3

SÉRIE I

Exprimir em m^3:

1) 5,76433148 km^3 =
2) 16,4385 dm^3 =
3) 0,0013 dam^3 =
4) 2 735 148 901 mm^3 =

Exemplo: 36,725 cm^3 =
36,725 cm^3 = 0,000036725 m^3

SÉRIE II

Completar as seguintes igualdades:

1) 3 810 075 mm^3 = ... m^3
2) 2,7811305 hm^3 = ... dm^3
3) 13,740075 m^3 = ... mm^3
4) 0,0006801 km^3 = ... m^3

Exemplo: 0,00371 dam^3 = ... dm^3
0,00371 dam^3 = 3710 dm^3

4. Unidades de capacidade

Unidade fundamental de capacidade: *litro* (símbolo: L).

■ **Múltiplo do litro**

Quilolitro (kL) vale 1 000 = 10^3L
Hectolitro (hL) vale 100 = 10^2L
Decalitro (daL) vale 10 = 10^1L

■ **Submúltiplos do litro**

Decilitro (dL) vale 0,1 = 10^{-1}L
Centilitro (cL) vale 0,01 = 10^{-2}L
Mililitro (mL) vale 0,001 = 10^{-3}L

Relação importante:

1L equivale a 1 dm^3

■ **Mudança de unidades**

A mudança de unidades é feita como na mudança de medidas de comprimento.

Exemplo: 37,75 daL = 377,5 L
= 0,3775 kL

SÉRIE I

Exprimir em litros:

1) 0,75 daL =
2) 6720 mL =
3) 25 cL =
4) 0,725 dL =

Exemplo: 63,5 hL =
63,5 hL = 6 350 L

SÉRIE II

Completar as seguintes igualdades:

1) 725 dL = ... daL
2) 47 875 mL = ... dL
3) 7,5 hL = ... L
4) 9,75 cL = ... mL

Exemplo: 0,605 kL = ... L
0,605 kL = 605 L

SÉRIE III

Exprimir em litros:

1) 0,475 m^3 =
2) 47 cm^3 =
3) 25 dm^3 =
4) 14,106 dam^3 =

Exemplo: 2,7804 dam^3
2,7804 dam^3 = 2780400 dm^3 = 2780 400 L

SÉRIE IV

Exprimir em dm^3:

1) 42 hL =
2) 10,05 kL =
3) 67 510 mL =
4) 48 cL =

Exemplo: 36,745 daL
36,745 daL = 367,45 L = 367,45 dm^3

5. Unidades de massa

Unidade fundamental de massa: *quilograma* (símbolo: kg).

Um submúltiplo do quilograma é o *grama*. O grama é equivalente a um milésimo do quilograma.

■ **Múltiplos do grama**

Quilograma (kg) vale 1 000 g = 10^3g
Hectograma (hg) vale 100 g = 10^2g
Decagrama (dag) vale 10 g = 10^1g

■ **Submúltiplos do grama**

Decigrama (dg) vale 0,1 g = 10^{-1}g
Centigrama (cg) vale 0,01 g = 10^{-2}g
Miligrama (mg) vale 0,001 g = 10^{-3}g

■ **Mudança de unidades**

A mudança de unidades é feita como na mudança de medida de comprimento e de capacidade.

Além dessas unidades, usam-se também: tonelada, cujo símbolo é *t*, e *quilate*.

Relações importantes:

1 t equivale a 1 000 kg		1 quilate equivale a 0,2 g

Exemplo: 7234,8 dag = 72,348 kg = 72348 g

A *tonelada* é empregada para medir *grandes massas* e o *quilate* para medir massa de *pedras preciosas* e *metais preciosos*.

SÉRIE I

Exprimir em gramas:

1) 3,72 hg =
2) 478 cg =
3) 732,5 mg =
4) 1,5 dag =

Exemplo: 27,54 dag = 27,54 dag = 275,4 g

SÉRIE II

Exprimir em toneladas:

1) 276850 dag =
2) 54500 kg =
3) 78545 hg =
4) 10^7 g =

Exemplo: 37480 hg = 3748 kg = 3,748 t

SÉRIE III

Exprimir em quilogramas:

1) 87,45 hg =
2) 2378,6 dag =
3) 0,72 t =
4) 10^8 mg =

Exemplo: 6375 dg = 0,6375 kg

SÉRIE IV

Exprimir em quilates:

1) 30 dg =
2) 0,45 dag =
3) 25,6 g =
4) 1480 mg =

Exemplo: 15 g = 15 : 0,2 = 75 quilates

SÉRIE V

Exemplo: A massa de um diamante é 640 quilates. A quantos gramas corresponde?
Resolução: 640 × 0,2 = 128 g

Exercícios

1) A massa de um diamante é 745,4 quilates. A quantos gramas corresponde?

2) A massa de um diamante é 135 g. A quantos quilates corresponde?

3) Um carro tanque transporta 9 m³ de água destilada. Qual é a massa, em toneladas, da água transportada?
Sugestão: 1 L equivale a 1 kg.

4) Uma bola de futebol, oficialmente, deve ter massa de 396 a 453 gramas. Admita que uma certa bola tem massa 400 g. Quantas destas bolas devem ser juntadas para perfazer 6 kg?

6. Unidades de tempo (não decimais)

Unidade fundamental de tempo: *segundo* (símbolo: s).

Múltiplos usuais

Nomes	Símbolos	Valores
Minuto	min	60 s
Hora	h	60 · 60 = 3600 s
Dia	d	24 · 60 · 60 = 86400 s

Relações:

1 min	equivale a	60 s
1 h	equivale a	60 min
1 d	equivale a	24 h

É usual a medição do tempo em várias unidades.

Exemplo: 7 d 5 h 37 min 28 s

Medidas como estas são chamadas *medidas complexas*.
Como se pode observar, as relações entre as medidas de tempo são *não decimais*.

Sendo $15\,\text{min} = \frac{1}{4}\,\text{h}$

$30\,\text{min} = \frac{1}{2}\,\text{h}$

$45\,\text{min} = \frac{3}{4}\,\text{h}$

é costume dizer, por exemplo,

3 h e $\frac{1}{4}$, ao invés de 3 h 15 min;

7 h e $\frac{1}{2}$, ao invés de 7 h 30 min;

2 h e $\frac{3}{4}$, ao invés de 2 h 45 min.

Mudanças de unidades

1º Medida complexa em medida simples

SÉRIE I

Exprimir em segundos:

Exemplo: 4 d 13 h 28 min 17 s

Algoritmo: 1) $4 \cdot 24 = 96h$
$+13$
$109h$

2) $109 \cdot 60 = 6540min$
$+ 28$
$6568min$

3) $6\,568 \cdot 60 = 394080s$
$+ 17$
$394097s$

Exercícios

1) 2d 7h 21min 17s =

2) 1d 15h 32min 47s =

3) 18h 29min 32s =

4) 9h 40min 25s =

SÉRIE II

Exprimir em frações de horas:

Exemplo: 2h 16min 40s

Algorítmo: 1) $2 \cdot 60 = 120min$
$+ 16$
$136min$

$136 \cdot 60 = 8160s$
$+ 40$
$8200s$

2) $8200 : 3600 = \frac{82}{36} = \frac{41}{18} = \frac{41}{18}h$

Exercícios

1) 2h 01min 40s =

2) 1h 43min 20s =

3) 1h 26min 40s =

4) 13min 20s =

2º Medida simples em medida complexa

SÉRIE III

Exprimir em medida complexa:

Exemplo: 205 710s

Algorítmo: 1) 205710s | 60
257 | 3428min
171
510
30s

2) 3 428min | 60
428 | 57h
08min

3) 57h | 24
09h | 2d

$\therefore$ 2d 9h 8min 30s.

Exercícios

1) 372 830s =

2) 141 910s =

3) 74 825s =

4) 4 995min =

SÉRIE IV

Exprimir em fração de hora em medida complexa:

Exemplo: $\frac{49}{18}h$

Algorítmo: 49 | 18
$13 \cdot 60 = 780$ | 2h 43min 20s
060
$06 \cdot 60 = 360$
00|0

Exercícios

1) $\frac{29}{9}h =$

2) $\frac{47}{36}h =$

3) $\frac{273}{180}h =$

4) $\frac{3187}{3600}h =$

Notas

1ª) mês comercial: *30d* Símbolo: *me*

2ª) ano comercial: *360d* Símbolo: *a*

3ª) ano bissexto: o mês de fevereiro tem 29 dias.

Os anos bissextos são de dois tipos:

I. Múltiplos de 4 que não terminam por 00.
Exemplos: ... 1964, 1968, ... 1996, ...

II. Os que terminam por 00 se forem múltiplos de 400.
Exemplos: ..., 1600, 2000, 2400, ...

5 Equações do 1º Grau

Resolução em IR (IR = conjunto dos números reais)

SÉRIE I

Resolver: *1)* $4x = 20$ *2)* $7x = -14$ *3)* $6x = 10$ *4)* $15x = -9$

Exemplo: $3x = 12$

$$3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} \therefore x = 4 \quad \text{Resp.: } \{4\}$$

SÉRIE II

Resolver: *1)* $-3x = 9$ *2)* $-7x = -14$ *3)* $-6x = 14$ *4)* $-5x = -15$

Exemplo: $-2x = 6$

$$-2x = 6 \overset{(-1)}{\Rightarrow} (-1)(-2x) = (-1)\cdot(6) \therefore$$

$$\therefore 2x = -6 \therefore x = \frac{-6}{2} \therefore x = -3$$

Resp.: $\{-3\}$

SÉRIE III

Resolver: *1)* $3x - 1 = 8$

2) $-x + 2 = 5$

3) $-2x + 4 = -5$

4) $6x - 1 = 9$

Exemplo: $2x - 3 = 7$

$$2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 3 \therefore 2x = 10 \therefore$$

$$\therefore x = \frac{10}{2} \therefore x = 5 \qquad \text{Resp.: } \{5\}$$

SÉRIE IV

Resolver: *1)* $5x + 7 = 2x + 13$

2) $4x - 5 = 5x - 1$

3) $2x + 3 = 9 - x$

4) $4x + 11 = 7x + 1$

Exemplo: $3x - 4 = x - 2$

$$3x - 4 = x - 2 \Rightarrow 3x - x = -2 + 4 \therefore$$

$$\therefore 2x = 2 \therefore x = \frac{2}{2} \therefore x = 1 \quad \text{Resp.: } \{1\}$$

SÉRIE V

Resolver: *1)* $3(x - 1) = 8$ *2)* $5(1 - x) = 7$ *3)* $2(4x - 3) = 6x - 1$ *4)* $-3(1 - 2x) = 12 - 3x$

Exemplo: $2(x + 1) = 9$

$$2(x + 1) = 9 \Rightarrow 2x + 2 = 9 \therefore 2x = 9 - 2 \therefore$$

$$\therefore 2x = 7 \therefore x = \frac{7}{2} \qquad \text{Resp.: } \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

SÉRIE VI

Resolver: *1)* $5(2x + 1) = 4(x - 1)$

2) $4(x - 1) = 3(x - 2)$

3) $3(x + 2) = -(x + 1)$

4) $2(3 - x) = 3(2x + 1)$

Exemplo: $2(x + 1) = 3(x - 1)$

$$2(x + 1) = 3(x - 1) \Rightarrow 2x + 2 = 3x - 3 \therefore$$

$$\therefore 2x - 3x = -3 - 2 \therefore -x = -5 \overset{(-1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = 5 \qquad \text{Resp.: } \{5\}$$

SÉRIE VII

Exemplo: $\frac{x - 1}{2} = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$

1º passo: **Achar o m.m.c. (2, 3, 6) = 6**

2º passo: **Multiplicar a equação por 6:**

$$\frac{6(x - 1)}{2} = 6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

3º passo: **Preparar e resolver:**

$$3(x - 1) = 2x + 1 \Rightarrow 3x - 3 = 2x + 1$$

$$\therefore 3x - 2x = 1 + 3 \therefore x = 4 \qquad \text{Resp.: } \{4\}$$

Exercícios

Resolver: *1)* $\frac{x + 1}{2} = \frac{x}{6} - \frac{1}{6}$

2) $\frac{x}{4} + 1 = \frac{2x + 1}{2}$

3) $\frac{1 - x}{2} = \frac{x + 2}{3} - 1$

4) $\frac{2x + 1}{4} - 1 = \frac{x - 3}{6}$

Exemplo: $\frac{x-4}{2} = \frac{x}{5} - \frac{x+3}{10}$

1º passo: **Achar o m.m.c. (2, 5, 10) = 10**

2º passo: **Multiplicar os membros da equação por 10:**

$$\frac{10(x-4)}{2} = \frac{10x}{5} - \frac{10(x+3)}{10}$$

3º passo: **Preparar e resolver:**

$$5(x-4) = 2x - 1(x+3) \Rightarrow$$

atenção!

$\Rightarrow 5x - 20 = 2x - x - 3 \therefore 5x - 20 = x - 3 \therefore$

$\therefore 5x - x = 20 - 3 \therefore 4x = 17 \therefore x = \frac{17}{4}$

Resp.: $\left\{\frac{17}{4}\right\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $\frac{x-5}{3} = \frac{x}{2} - \frac{3x+2}{6}$

2) $\frac{1-x}{2} - \frac{2x+1}{4} = x$

3) $-\frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{12} + 1 = 0$

4) $\frac{2x-3}{6} - \frac{1-x}{3} = 1 - \frac{x+1}{12}$

SÉRIE IX

Exemplo: $0{,}3x - 0{,}4(x-1) = 0{,}23$

1º processo:

$0{,}3x - 0{,}4x + 0{,}4 = 0{,}23 \therefore -0{,}1x = 0{,}23 - 0{,}4 \therefore$

$\therefore -0{,}1x = -0{,}17 \overset{(-1)}{\Rightarrow} 0{,}1x = 0{,}17 \therefore x = \frac{0{,}17}{0{,}1} \therefore$

$\therefore x = \frac{17}{10} \therefore x = 1{,}7$ **Resp.:** $\{1{,}7\}$

2º processo:

1º passo: **Transformar os números decimais em frações decimais:**

$$\frac{3}{10}x - \frac{4}{10}(x-1) = \frac{23}{100}$$

2º passo: **Achar o m.m.c. (10,100) = 100**

3º passo: **Multiplicar os membros da equação por 100 e resolver:**

$100 \cdot \frac{3}{10}x - 100 \cdot \frac{4}{10}(x-1) = 100 \cdot \frac{23}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 30x - 40(x-1) = 23 \therefore 30x - 40x + 40 = 23 \therefore$

$\therefore -10x = 23 - 40 \therefore -10x = -17 \overset{(-1)}{\Rightarrow} 10x = 17 \therefore$

$\therefore x = \frac{17}{10} \therefore x = 1{,}7$ **Resp.:** $\{1{,}7\}$

> ➥ **Nota**
>
> A escolha do processo de resolução fica a seu critério!

Exercícios

Resolver: *1)* $0{,}6x - 0{,}7(x-1) = 0{,}02$

2) $0{,}4x + 0{,}6(x+1) = 3{,}4$

3) $1{,}2x - 0{,}03(x-2) = 0{,}411$

4) $0{,}3(x-1) - 0{,}04(x+1) = 0{,}076$

SÉRIE X

Resolver: *1)* $5x + 4 = 4(x+1)$

2) $\frac{x-1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{x+1}{2}$

Exemplo: $2(x+3) = 6$

$2(x+3) = 6 \Rightarrow 2x + 6 = 6 \therefore 2x = 6 - 6 \therefore$

$\therefore 2x = 0 \therefore x = \frac{0}{2} \therefore x = 0$

Resp.: $\{0\}$

SÉRIE XI

Resolver: *1)* $5(x+3) - 3(x-1) = 2(x+1)$

2) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{6} = 0$

Exemplo: $2(x-1) + x = 3(x+2)$

$2(x-1) + x = 3(x+2)$

$2x - 2 + x = 3x + 6 \therefore 3x - 2 = 3x + 6 \therefore$

$\therefore 3x - 3x = 6 + 2 \therefore \boxed{0x = 8}$

Este resultado significa que *não existe* valor de x que satisfaça a equação dada. Assim, o conjunto solução da equação *não possui elemento*, ou seja, é o conjunto vazio, e indicamos ∅.

SÉRIE XII

Resolver: *1)* $5x - 3 = 3(x-1) + 2x$

2) $\frac{2x-5}{7} + \frac{3x+17}{14} = \frac{x+1}{2}$

Exemplo: $3(x+1) - 2(x-1) = x + 5$

$3(x+1) - 2(x-1) = x + 5$

$3x + 3 - 2x + 2 = x + 5 \therefore x + 5 = x + 5 \therefore$

$\therefore x - x = 5 - 5 \therefore \boxed{0x = 0}$

Este resultado significa que a equação dada é satisfeita para qualquer valor real de x, e indicamos IR.

SÉRIE XIII

Exemplo: A soma de dois números inteiros consecutivos é igual a 25. Achar esses números.

Resolução:

Sejam x e x + 1 os números procurados. Devemos ter:

$$x + x + 1 = 25 \Rightarrow 2x + 1 = 25 \therefore$$

$$\therefore 2x = 25 - 1 \therefore 2x = 24 \therefore$$

$$\therefore x = \frac{24}{2} \therefore x = 12$$

Resp.: Os números são: 12 e 13.

Exercícios

Resolver os problemas:

1) A soma de dois números inteiros consecutivos é 87. Achar esses números.
2) A soma de três números inteiros consecutivos é 60. Achar esses números.
3) A soma de dois números inteiros é 51. Achar esses números sabendo que um deles é igual ao dobro do outro.
   Sugestão: x e 2x são os números.
4) A soma de três números inteiros é 130. Achar esses números sabendo que o segundo número é igual ao triplo do primeiro e o terceiro é igual ao dobro do segundo:
   Sugestão: 1º é x, o 2º é 3x e o 3º é 2...

SÉRIE XIV

Exemplo: A soma de dois números inteiros é igual a 46. Achar esses números sabendo que um excede o outro de 8 unidades.

Resolução:

Sejam x e x + 8 os números procurados. Devemos ter:

$$x + x + 8 = 46 \Rightarrow 2x + 8 = 46 \therefore$$

$$\therefore 2x = 46 - 8 \therefore 2x = 38 \therefore$$

$$\therefore x = \frac{38}{2} \therefore x = 19$$

Resp.: Os números são 19 e 27.

Exercícios

Resolver os problemas:

1) A soma de dois números inteiros é igual a 58. Achar esses números sabendo que um excede o outro de 16 unidades.
2) Pedro e Antônio possuem juntos R$ 4 525,00. Antônio possui R$ 875,00 mais que Pedro. Quanto possui cada um?
3) A diferença entre dois números é igual a 60. Achar esses números sabendo que um deles é igual a um terço do outro.
   Sugestão: x e $\frac{x}{3}$ são os números.
4) Achar o número cujo dobro aumentado de 10 é igual ao triplo diminuído de 2.

SÉRIE XV

Exemplo: $\frac{x-2}{x} = \frac{1}{3}$

1º passo: **Achar o m.m.c. (3, x) = 3x, x ≠ 0**

2º passo: **Multiplicar a equação por 3x:**

$$\frac{3x(x-2)}{x} = \frac{3x \cdot 1}{3}$$

3º passo: **Preparar e resolver:**

$$3(x - 2) = x$$

$$\therefore 3x - 6 = x$$

$$\therefore 3x - x = 6$$

$$\therefore 2x = 6$$

$$\therefore x = \frac{6}{2}$$

$$\therefore x = 3$$

Resp.: {3}

Exercícios

Resolver:

1) $\frac{x+3}{x} = \frac{3}{2}$
2) $\frac{2x-1}{3x} = \frac{7}{12}$
3) $\frac{x-1}{2x} = \frac{4}{3}$
4) $\frac{x}{7-x} = \frac{2}{5}$

SÉRIE XVI

Exemplo: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$

m.m.c. $(x - 1, x) = (x - 1) \cdot x$

$$\frac{2 \cdot (x-1) \cdot x}{x-1} = \frac{(x-1) \cdot x \cdot 1}{x}$$

$$\therefore 2x = x - 1$$

$$\therefore 2x - x = -1$$

$$\therefore x = -1$$

Resp.: {–1}

Exercícios

Resolver:

1) $\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x}$
2) $\frac{7}{3x-1} = \frac{8}{3x}$
3) $\frac{3}{x+1} = \frac{5}{2x-1}$
4) $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-4}$

6 Inequações do 1º Grau

Resolução em IR

SÉRIE I

Exemplo: $3x > 12$

$3x > 12 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x > \frac{1}{3} \cdot 12 \therefore \frac{3}{3}x > \frac{12}{3} \therefore$

$\therefore x > 4$ **Resp.:** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

lê-se: tal que

Regra prática:

$3x > 12 \Rightarrow x > \frac{12}{3} \therefore x > 4$

Exercícios

Resolver: *1)* $2x > 8$

2) $7x > -14$

3) $6x > 30$

4) $3x > -5$

SÉRIE II

Exemplo: $3x < 12$

$3x < 12 \Rightarrow x < \frac{12}{3} \therefore x < 4$

Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $5x < 10$

2) $6x < -18$

3) $2x < 14$

4) $9x < -6$

SÉRIE III

Exemplo: $-3x < 12$

1º passo: **Multiplicar os membros da inequação por (−1) e inverter o sentido da desigualdade:**

$-3x < 12 \Rightarrow (-1)(-3x) > (-1)(12)$

Preparar e resolver:

$3x > -12 \Rightarrow x > \frac{-12}{3} \therefore x > -4$

Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$

Exercícios

Resolver *1)* $-4x < 12$

2) $-2x < 8$

3) $-3x < -9$

4) $-8x < -12$

SÉRIE IV

Exemplo: $2x - 3 > 7$

$2x - 3 > \Rightarrow 2x > 7 + 3 \therefore 2x > 10 \therefore$

$\therefore x > \frac{10}{2} \therefore x > 5$

Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $3x - 1 > 8$

2) $6x - 1 < 11$

3) $-x + 2 > 5$

4) $-2x + 4 > -6$

SÉRIE V

Exemplo: $3(x - 1) \geq x + 7$

$3(x - 1) \geq x + 7 \Rightarrow 3x - 3 \geq x + 7 \therefore$

$\therefore 3x - x \geq 7 + 3 \therefore 2x \geq 10 \therefore x \geq \frac{10}{2} \therefore$

$\therefore x \geq 5$

Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $5(x + 1) \geq x - 3$

2) $2(x - 1) \leq x + 2$

3) $2(3x - 1) \geq 7x + 1$

4) $-4(x + 2) \leq x + 5$

SÉRIE VI

Exemplo: $\frac{x - 4}{2} \leq \frac{x}{3} - \frac{3x + 2}{6}$

$\frac{x - 4}{2} \leq \frac{x}{3} - \frac{3x + 2}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6(x - 4)}{2} \leq \frac{6x}{3} - \frac{6(3x + 2)}{6} \therefore$

m.m.c. (2, 3, 6) = 6

$\therefore\ 3(x-4) \leqslant 2x-(3x+2)\ \therefore$

$\therefore\ 3x-12 \leqslant 2x-3x-2\ \therefore$

$\therefore\ 3x-12 \leqslant -x-2\ \therefore$

$\therefore\ 3x+x \leqslant -2+12\ \therefore$

$4x \leqslant 10\ \therefore\ x = \leqslant \frac{10}{4}\ \therefore\ x \leqslant \frac{5}{2}$

Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5/2\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $\frac{2x+1}{4} + x > \frac{1-x}{2}$

2) $\frac{2x-3}{6} - \frac{1-x}{3} \leqslant 1 - \frac{x+1}{12}$

3) $0{,}3(x+1) > 0{,}2(x-1) + 0{,}04$

4) $0{,}06(x-2) \leqslant 0{,}01(x+1) - 0{,}003$

7 Razão e Proporção

1. *Razão* de dois números *a* e *b*, $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$ ou a : b. (Lê-se *a* está para *b*)

SÉRIE I

Qual a razão de:

1) 12km e 24 000m?
2) 0,7kg e 210dag?
3) 60km/h e 40km/h?
4) $80m^3$ e $120m^3$?

Exemplo: 15km e 45 000m?

Devemos ter:

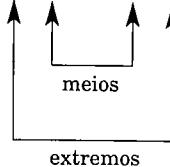
$$\frac{15km}{45000m} = \frac{15000m}{45000m} = \frac{15000}{45000} = \frac{1}{3}$$

SÉRIE II

Calcular a razão:

1) $\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}} =$

2) $\dfrac{2\times\frac{1}{4}}{1:\frac{2}{3}} =$

3) $\dfrac{0,2+1,3}{3\times 0,4} =$

4) $\dfrac{\sqrt{4}}{1-0,4} =$

Exemplo: $\dfrac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}$

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}:\frac{3}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

2. *Proporção* é a igualdade de duas razões.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou a : b = c : d, $b \neq 0$ e $d \neq 0$

(b e c: meios; a e d: extremos)

Propriedade fundamental:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

SÉRIE III

Exercícios

Escreva em forma de proporção:

1) $3 \times 4 = 2 \times 6$
2) $4 \times 9 = 6 \times 6$
3) $x \cdot y = a \cdot b$, onde x, y, a e b não são nulos.

Exemplo: $3 \times 10 = 5 \times 6$

Devemos ter as seguintes possibilidades:

1ª) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

2ª) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ (alternando os meios)

3ª) $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$ (alternando os extremos)

4ª) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ (invertendo as razões)

5ª) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

6ª) $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$

7ª) $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$

8ª) $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

(5ª a 8ª) **Transpondo as quatro primeiras proporções**

> **Nota**
>
> Fora destas (8) disposições, não se terá proporção que *satisfaça* a igualdade dos produtos: $3 \times 10 = 5 \times 6$.

Proporção contínua **é aquela cujos meios ou extremos são iguais.**

Exemplo: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ **ou** $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$

SÉRIE IV

Escrever uma proporção contínua com os números:

1) 4, 8 e 16 *2)* 1, $\sqrt{5}$ e 5

Exemplo: 3, 6 e 12

Devemos ter as seguintes possibilidades básicas:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} \text{ ou } \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

SÉRIE V

Calcular o valor de x (4ª proporcional) em cada proporção:

1) $\frac{4}{6} = \frac{x}{3}$

2) $\frac{15}{x} = \frac{10}{2}$

3) $\frac{6}{21} = \frac{2}{x}$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 6 \therefore x = \frac{24}{8} \therefore x = 3$$

SÉRIE VI

Calcular o valor de x em cada proporção:

1) $\frac{\frac{x}{\frac{1}{2}}}{} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$

2) $\frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{1 + \frac{1}{3}}$

3) $\frac{2x}{\frac{3}{4}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$

4) $\frac{x}{1,2} = \frac{0,6}{0,2}$

Exemplo: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}}$

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \therefore \frac{3x}{4} = \frac{2}{21} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{8}{63}$$

SÉRIE VII

Calcular o valor de x em cada proporção:

1) $\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$

2) $\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$

3) $\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$

4) $\frac{x}{5} = \frac{1}{x}$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$

$$\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x \cdot x = 4 \cdot 16 \therefore x^2 = 64$$

$\therefore$ **x = ±8, ou seja, x = 8 ou x = –8**

SÉRIE VIII

Calcular o valor de x em cada expressão:

1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

3) $\frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$

4) $\frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{x}$

Exemplo: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Devemos ter:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3+2}{6} \therefore \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \therefore$$

$$\therefore 5x = 6 \cdot 1 \therefore x = \frac{6}{5}$$

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

P.1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ **ou** $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

P.2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ **ou** $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

SÉRIE IX

Resolver os problemas:

1) A razão de dois números é $\frac{1}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 16.

2) A razão das idades de duas pessoas é $\frac{2}{3}$. Achar essas idades sabendo que a soma delas é 35 anos.

3) A razão das medidas de dois segmentos é $\frac{3}{5}$. Achar essas medidas sabendo que a soma delas é 32 cm.

4) A razão das áreas de duas figuras é $\frac{4}{7}$. Achar essas áreas sabendo que a soma delas é 66 cm^2.

Exemplo: A razão de dois números é $\frac{2}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 15.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ e } x + y = 15$$

Aplicando a P.1, vem:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{15}{y} = \frac{5}{3} \therefore y = \frac{15\times 3}{5} = 9$$

e

$$\frac{x+y}{x} = \frac{2+3}{2} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{5}{2} \therefore x = \frac{15\times 2}{5} = 6$$

Resp.: Os números são 6 e 9.

SÉRIE X

Resolver os problemas:

1) A diferença de dois números é 12 e a razão é $\frac{2}{5}$. Achar esses números.

2) A diferença das idades de duas pessoas é 20 anos e a razão é $\frac{4}{9}$. Quais são as idades?

3) A diferença das medidas de dois ângulos é 60° e a razão é $\frac{2}{5}$. Quais são as medidas dos ângulos?

4) A diferença dos volumes de dois sólidos é 9cm^3 e a razão é $\frac{2}{3}$. Achar os volumes.

Exemplo: A diferença de dois números positivos é 21 e a razão é $\frac{1}{4}$. Achar esses números.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4} \text{ e } y - x = 21 (y > x)$$

Aplicando a P.2, vem:

$$\frac{y-x}{y} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{21}{y} = \frac{3}{4} \therefore$$

$$\therefore y = \frac{21\times 4}{3} = 28 \text{ e}$$

$$\frac{y-x}{x} = \frac{4-1}{1} \Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{3}{1} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{21\times 1}{3} = 7$$

Resp.: Os números são 7 e 28.

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

P.3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ **ou** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Dada uma série de razões iguais:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} ...$, **temos:**

P.4) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... \frac{a+c+e+...}{b+d+f+...}$

SÉRIE XI

Resolva os problemas:

1) A soma de três números é 90. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 3, 5 e 7.

2) A soma das medidas dos lados de um triângulo é 48cm. Achar os lados desse triângulo sabendo que as medidas dos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

3) As medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são proporcionais aos números 3, 7 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 180°.

4) Uma circunferência é dividida em três arcos, cujas medidas em graus são proporcionais aos números 4, 6 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 360°.

Exemplo: A soma de três números é 180. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 4, 5 e 6.

Resolução:

Sejam x, y e z os números procurados, temos: x + y + z = 180 e $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$.

Aplicando a P.4, vem:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{4+5+6} = \frac{180}{15} = \frac{12}{1}$$

Daí, $\frac{x}{4} = \frac{12}{1} \therefore x = 48$

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1} \therefore y = 60$$

$$\frac{z}{6} = \frac{12}{1} \therefore z = 72$$

Resp.: Os números são 48, 60 e 72.

8 Regra de Três

SÉRIE I

Regra de três simples e direta

Exemplo: Uma pessoa ganha R$ 6.750,00 por 15 dias de trabalho: quanto receberá por 9 dias de trabalho?

Resolução:

O salário de uma pessoa é diretamente proporcional aos dias de trabalho, portanto a razão entre os salários é igual à razão entre os correspondentes dias de trabalho.

Algoritmo: **Indicando por x o salário que receberá por 9 dias, temos:**

	dias		ganho
↓	15	—	6.750
	9	—	x

Como as grandezas são diretamente proporcionais, a razão das duas primeiras é igual à razão das duas últimas, logo:

$$\frac{15}{9} = \frac{6.750}{x} \therefore x = \frac{9 \times 6.750}{15} \therefore x = 4.050$$

Resp.: R$ 4.050,00

Observações

Indicaremos a regra três direta com uma flecha voltada para baixo (↓) e, no caso contrário, com a flecha voltada para cima (↑).

Exercícios

1) Uma pessoa ganha R$ 5.400,00 por 12 dias de trabalho; quanto receberá por 21 dias de trabalho?

2) Uma pessoa recebe R$ 10.000,00 por 25 dias de trabalho. Quanto receberia se tivesse trabalhado 8 dias a mais?

3) Um homem que trabalha em uma pedreira deu em uma hora 1.200 pancadas para fazer um buraco numa pedra. Quantas pancadas deu em 45 minutos?

4) No mesmo instante em que um prédio de 4,5 m de altura projeta uma sombra de 13,5 m, qual será o comprimento da sombra projetada por uma torre de 130 m de altura?

SÉRIE II

Regra de três simples e inversa

Exemplo: Se 45 operários fazem uma obra em 16 dias, quantos operários serão necessários para fazer a mesma obra em 12 dias?

Algoritmo:

	dias		operários
↑	16	—	45
	12	—	x

Como o número de dias é inversamente proporcional ao número de operários, a regra de três é inversa, logo:

$$\frac{12}{16} = \frac{45}{x} \therefore x = \frac{16 \times 45}{12} \therefore x = 60$$

Resp.: 60 operários.

Exercícios

1) Um automóvel, com a velocidade de 80 km/h, demora 3 horas para percorrer uma certa distância. Quanto tempo demorará para percorrer a mesma distância outro automóvel cuja velocidade é de 120 km/h?

2) Uma roda de 30 dentes engrena com outra de 25 dentes. Quantas voltas dará esta última quando a primeira der 175 voltas?

3) Para forrar as paredes de uma sala são necessárias 20 peças de papel com 80 cm de largura cada uma. Quantas peças seriam necessárias se as peças tivessem 1 m de largura?

4) Para realizar a metade de uma obra 10 operários levaram 13 dias. Se são empregados mais 16 operários, quantos dias levarão para terminar essa obra?

9 Porcentagem

Porcentagem é uma razão centesimal, ou seja, o denominador é igual a 100.

Exemplo: $\frac{25}{100}$ que se indica por 25%.

SÉRIE I

Exprimir cada número em porcentagem:

1) $\frac{3}{4} =$

2) 0,7

3) 0,12

4) 1,25

Exemplo: $\frac{4}{5} =$

$$\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$$

SÉRIE II

Exprimir cada porcentagem em número decimal:

1) 45% =

2) 7% =

3) 50% =

4) 130% =

Exemplo: 27%

$$27\% = \frac{27}{100} = 0,27$$

SÉRIE III

Calcular: *1)* 40% de 650

2) 60% de 2,5

3) 120% de 85

4) 200% de 7,85

Exemplo: 30% de 500

$$30\% \text{ de } 500 = \frac{30}{100} \times 500 = 0,30 \times 500 = 150$$

SÉRIE IV

Calcular: *1)* 20% de 30%

2) 15% de 80%

3) 90% de 10%

4) 5% de 200%

Exemplo: 25% de 30%

$$25\% \text{ de } 30\% = \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} = 0,25 \times 0,3 = 0,075 = 7,5\%$$

SÉRIE V

Calcular: *1)* $(20\%)^2 =$

2) $(5\%)^2 =$

3) $(10\%)^3 =$

4) $(20\%)^3 =$

Exemplo: $(10\%)^2$

$$(10\%)^2 = 10\% \times 10\% = 0,1 \times 0,1 = 0,01 = 1\%$$

SÉRIE VI

Exemplo: Um objeto que custa R$ 2.500,00 foi adquirido com 15% de desconto. Calcular o desconto.

Resolução:

Devemos ter:

15% de 2.500 = 0,15 × 2.500 = 375

Resp.: R$ 375,00

Exercícios

1) Um objeto que custa R$ 3.700,00 foi comprado com 25% de desconto. Calcular o desconto.

2) Um objeto que custa R$ 45.000,00 foi vendido com um ágio de 20%. Calcular o ágio.

3) Um objeto custa R$ 15.000,00. Este objeto foi vendido com um lucro de 12% sobre o custo. Qual o lucro?

4) Uma pessoa vende um carro que custa R$ 135.000,00 com um prejuízo de 15%. Calcular o prejuízo.

SÉRIE VII

Exemplo: Um objeto que custa R$ 3.500,00 foi comprado com um ágio de 15%. Qual o preço de compra?

Resolução:

Seja p o preço de compra, temos:

$$p = 3.500 + 15\% \text{ de } 3.500$$
$$= 3.500 + 0,15 \times 3.500 = (1 + 0,15) \cdot 3.500$$
$$= 1,15 \cdot 3.500 = 4\,025$$

Resp.: R$ 4.025,00

Regra prática:

100%	→	1
+ 15%	→	0,15
115%	→	1,15

$$p = 1,15 \times 3.500 \quad \therefore \quad p = 4.025.$$

Exercícios

1) Um objeto que custa R$ 7.500,00 foi comprado com um ágio de 12%. Qual o preço de compra?

2) Um rádio custa R$ 2.900,00. Uma pessoa que o comprou pagou um ágio de 10%. Quanto pagou?

SÉRIE VIII

Exemplo: Um objeto que custa R$ 4.750,00 foi comprado com um desconto de 15%. Qual o preço de compra?

Resolução:

Seja p o preço de compra, temos:

$p = 4.750 - 15\%$ **de** 4.750

$= 4.750 - 0,15 \times 4.750 = (1 - 0,15) \cdot 4.750$

$= 0,85 \cdot 4.750 = 4.037,50$

Resp.: R$ 4.037,50

Regra prática:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \rightarrow & 1 \\ -\ \underline{15\%} & \rightarrow & \underline{0,15} \\ 85\% & \rightarrow & 0,85 \end{array}$$

$p = 0,85 \times 4.750 = \ \therefore\ p = 4.037,50$

Exercícios

1) Um objeto que custa R$ 6.780,00 foi comprado com um desconto de 12%. Qual o preço de compra?
2) Um carro que custa R$ 145.000,00 foi vendido com um prejuízo de 10%. Qual o preço de venda?

SÉRIE IX

Exemplo: Um objeto que custa R$ 4.500,00 foi comprado por R$ 5.400,00. Qual a porcentagem do lucro sobre o custo?

Resolução:

Sejam x a porcentagem e L o lucro, temos:

$L = 5.400 - 4.500 \ \therefore\ L = 900$

Então : $x = \dfrac{900}{4.500} = 0,2 \ \therefore\ x = 20\%$

Resp.: 20%

Exercícios

1) Um objeto que custa R$ 6.300,00 foi comprado por R$ 7.245,00. Qual a porcentagem do lucro sobre o custo?
2) Um objeto que custa R$ 30.000,00 foi vendido com ágio por R$ 37.500,00. Qual a porcentagem do ágio sobre o custo?

SÉRIE X

Exemplo: Um objeto que custa R$ 25.000,00 foi comprado por R$ 22.000,00. Qual a porcentagem do desconto sobre o custo?

Resolução:

Sejam x a porcentagem e D o desconto, temos:

$D = 25.000 - 22.000 \ \therefore\ D = 3.000$

Então, $x = \dfrac{3.000}{25.000} = 0,12 \ \therefore\ x = 12\%$

Resp.: 12%

Exercícios

1) Um objeto que custa R$ 13.500,00 foi adquirido por R$ 11.205,00. Qual a porcentagem do desconto sobre o custo?
2) Uma pessoa vendeu o seu carro por R$ 131.200,00. Sabendo que esse carro lhe custou R$ 160.000,00, calcular a porcentagem do prejuízo sobre o custo.

SÉRIE XI

Exemplo: 70 gramas de carbonato de cálcio contêm 28 gramas de cálcio. Qual a porcentagem de cálcio no carbonato de cálcio?

Resolução:

Seja x a porcentagem.
Devemos ter:

$x = \dfrac{28}{70} = 0,4 \ \therefore\ x = 40\%$

Resp.: 40%

Exercícios

1) 50 gramas de carbonato de cálcio contêm 6 gramas de carbono. Qual a porcentagem de carbono no carbonato de cálcio?
2) 360 gramas de glicose contêm 144 gramas de carbono. Qual a porcentagem de carbono na glicose?
3) 0,24kg de hidróxido de sódio contém 0,138kg de sódio. Qual a porcentagem de sódio no hidróxido de sódio?
4) 80 gramas de sulfato de ferro contêm 22,4 gramas de ferro. Qual a porcentagem de ferro no sulfato de ferro?

SÉRIE XII

Exemplo: 160 gramas de sulfato de ferro contêm 44,8 gramas de ferro, 38,4 gramas de enxofre e 76,8 gramas de oxigênio. Calcular as porcentagens, em massa, de ferro, enxofre e oxigênio no sulfato de ferro.

Resolução:

x% de ferro (Fe):

$$x = \frac{44,8}{160} = 0,28 \quad \therefore \quad x = 28\%$$

y% de enxofre (S):

$$y = \frac{38,4}{160} = 0,24 \quad \therefore \quad y = 24\%$$

z% de oxigênio (O):

$$z = \frac{76,8}{160} = 0,48 \quad \therefore \quad z = 48\%$$

Resp.: 28% de ferro, 24% de enxofre e 48% de oxigênio.

Exercícios

1) 25 gramas de carbonato de cálcio contêm 10 gramas de cálcio, 3 gramas de carbono e 12 gramas de oxigênio. Calcular as porcentagens, em massa, de cálcio, carbono e oxigênio no carbonato de cálcio.

2) 900 gramas de glicose contêm 360 gramas de carbono, 60 gramas de hidrogênio e 480 gramas de oxigênio. Calcular as porcentagens, em massa, de carbono, hidrogênio e oxigênio na glicose.

3) 4,8kg de hidrogênio de sódio contêm 2,76kg de sódio, 1,92kg de oxigênio e 0,12kg de hidrogênio. Calcular as porcentagens, em massa, de sódio, oxigênio e hidrogênio no hidróxido de sódio.

SÉRIE XIII

Exemplo: O carbonato de cálcio contém 40% de cálcio, 12% de carbono e 48% de oxigênio. Em 500 gramas de carbonato de cálcio, quantos gramas têm de cálcio, enxofre e oxigênio?

Resolução:

Cálcio:

$$40\% \text{ de } 500 = \frac{40}{100} \times 500 =$$

$$= 0,4 \times 500 = 200$$

Carbono:

$$12\% \text{ de } 500 = \frac{12}{100} \times 500 =$$

$$= 0,12 \times 500 = 60$$

Oxigênio:

$$48\% \text{ de } 500 = \frac{48}{100} \times 500 =$$

$$= 0,48 \times 500 = 240$$

Resp.: 200g de cálcio, 60g de carbono e 240g de oxigênio.

Exercícios

1) O hidróxido de sódio contém 57,5% de sódio, 40% de oxigênio e 2,5% de hidrogênio. Em 216 gramas de hidróxido de sódio, quantos gramas têm de sódio, oxigênio e hidrogênio?

2) A glicose contém 40% de carbono, $6\frac{2}{3}\%$ de hidrogênio e $53\frac{1}{3}\%$ de oxigênio. Em 720 gramas de glicose, há quantos gramas de carbono, hidrogênio e oxigênio?

3) O sulfato se ferro (III) contém 28% de ferro, 24% de enxofre e 48% de oxigênio. Em 480g de sulfato de ferro (III), quantos gramas têm de ferro, enxofre e oxigênio?

SÉRIE XIV

Exemplo: Um sal contendo 10% de umidade foi aquecido numa estufa até ser eliminada a metade de sua quantidade de água. Qual a porcentagem de umidade (água) no sal após a secagem?

Resolução:

Antes da secagem: **100g de sal úmido, por exemplo, têm 10% de umidade, ou seja:**

$$10\% \text{ de } 100g = \frac{10}{100} \times 100 = 10g \text{ umidade (água).}$$

Depois da secagem: **O sal úmido esta pesando:**

$$100g - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 10g}_{\text{o que evapora}} = 100 - 5 = 95g$$

onde 5g são de umidade, pois a metade evaporou. Portanto, a porcentagem de umidade no sal úmido é de 5g em 95g, ou seja,

$$5:95 = \frac{5}{95} = 0,0526 = \frac{5,26}{100} = 5,26\% \text{ (aprox.)}$$

> **➡Nota**
>
> A porcentagem exata é: $\frac{5}{95} \times 100 = \frac{1}{19} \times 100 = \frac{100}{19}\%$

Exercícios

1) Um sal contendo 10% de umidade foi aquecido numa estufa até ser eliminada a quarta parte de sua quantidade de água. Qual a porcentagem de umidade no sal após a secagem?

2) Uma mistura contém 60% de ferro, 25% de enxofre e 15% de areia. Por meio de um solvente apropriado, todo o enxofre foi extraído da mistura. Quais as porcentagens de ferro e areia na mistura depois da extração de todo o enxofre?

3) A hemoglobina contém 0,335% de ferro. Qual a massa de hemoglobina que contém 67 gramas de ferro?

10 Sistemas de Equações Simultâneas do 1º Grau

SÉRIE I

Exemplo: $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Resolução:

Método da adição

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$3x = 9 \therefore x = \frac{9}{3} \therefore x = 3$

Substituindo x = 3 na primeira equação, por exemplo, temos:

$2(3) + y = 8 \therefore 6 + y = 8 \therefore$

$\therefore y = 8 - 6 \therefore y = 2$

Resp.: $\{(3, 2)\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ x - y = -5 \end{cases}$

SÉRIE II

Exemplo: $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x + y = 14 \end{cases} \overset{\times(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 9x + 3y = 42 \end{cases}$$

$13x = 52 \therefore$

$\therefore x = \frac{52}{13} \therefore x = 4$

Substituindo x = 4 na primeira equação, temos:

$4(4) - 3y = 10 \therefore 16 - 3y = 10 \therefore$

$\therefore -3y = 10 - 16 \therefore -3y = -6 \therefore$

$\therefore 3y = 6 \therefore$

$\therefore y = \frac{6}{3} \therefore y = 2$

Resp.: $\{(4, 2)\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 7y = -28 \\ -5x + 4y = 47 \end{cases}$

SÉRIE III

Exemplo: $\begin{cases} 5x - 2y = 17 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 17 \overset{\times(3)}{\Rightarrow} \\ 2x - 3y = 9 \overset{\times(-2)}{\Rightarrow} \end{cases} \begin{cases} 15x - 6y = 51 \\ -4x + 6y = -18 \end{cases}$$

$11x = 33 \therefore$

$\therefore x = \frac{33}{11} \therefore x = 3$

Substituindo x = 3 na primeira equação, temos:

$5(3) - 2y = 17 \therefore 15 - 2y = 17 \therefore$

$\therefore -2y = 17 - 15 \therefore -2y = 2 \therefore$

$\therefore 2y = -2 \therefore$

$\therefore y = \frac{-2}{2} \therefore y = -1$

Resp.: $\{(3, -1)\}$

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} 4x - 3y = 17 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x - 5y + 29 = 0 \\ 6x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

SÉRIE IV

Exemplo: $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$

Resolução:

Método da substituição

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 & (1) \\ x = 2y - 3 & (2) \end{cases}$$

Substituindo a equação (2) em (1), temos:

$3(2y - 3) - 2y = -1 \therefore 6y - 9 - 2y = -1 \therefore$

$\therefore 6y - 2y = -1 + 9 \therefore 4y = 8 \therefore$

$y = \frac{8}{4} \therefore y = 2$

Substituindo y = 2 em (2), vem:

$x = 2(2) - 3 \therefore x = 4 - 3 \therefore x = 1$

Resp.: {(1, 2)}

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x = 2y + 6 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ y = 4x + 7 \end{cases}$

SÉRIE V

Exemplo: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 5 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 5 = 0 & (1) \\ y = x - 5 & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), temos:

$\frac{x}{3} + \frac{x - 5}{2} - 5 = 0 \therefore$

$\therefore \frac{6x}{3} + \frac{6(x - 5)}{2} - 6 \cdot 5 = 0 \therefore$

m.m.c. (3, 2) = 6

$\therefore 2x + 3(x - 5) - 30 = 0 \therefore$

$\therefore 2x + 3x - 15 - 30 = 0 \therefore 5x - 45 = 0 \therefore$

$\therefore 5x = 45 \therefore x = \frac{45}{5} \therefore x = 9$

Substituindo x = 9 em (2), vem:

$y = 9 - 5 \therefore y = 4$

Resp.: {(9, 4)}

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} - \frac{1}{9} = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

SÉRIE VI

Exemplo: $\begin{cases} 0,2x + 0,15y = 0,85 \\ 0,3x - 0,05y = 0,45 \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} 0,2x + 0,15y = 0,85 \\ 0,3x - 0,05y = 0,45 \end{cases} \therefore$

$\begin{cases} \frac{2}{10}x + \frac{15}{100}y = \frac{85}{100} \\ \frac{3}{10}x - \frac{5}{100}y = \frac{45}{100} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{3}{20}y = \frac{17}{20} \\ \frac{3}{10}x - \frac{1}{20}y = \frac{9}{20} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 6x - y = 9 \end{cases} \therefore \underset{\times(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 18x - 3y = 27 \end{cases}$

$22x = 44$

$\therefore x = \frac{44}{22} \therefore x = 2$

Substituindo x = 2 na equação 4x + 3y = 17, vem:

$4(2) + 3y = 17 \therefore 3y = 17 - 8 \therefore$

$\therefore 3y = 9 \therefore y = 3$

Resp.: {(2, 3)}

Exercícios

Resolver: *1)* $\begin{cases} 0,4x + 0,12y = 0,16 \\ 0,6x - 0,07y = 0,74 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0,25x + 0,3y = 0,65 \\ 0,08x + 0,2y = 0,52 \end{cases}$

SÉRIE VII

Exemplo: A soma de dois números é 10; um deles excede o dobro do outro de uma unidade. Achar esses números.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados. Devemos ter:

$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x = 2y + 1 & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), vem:

$2y + 1 + y = 10 \therefore 3y + 1 = 10 \therefore$

$\therefore 3y = 10 - 1 \therefore 3y = 9 \therefore y = 3$

Substituindo y = 3 em (2), temos:

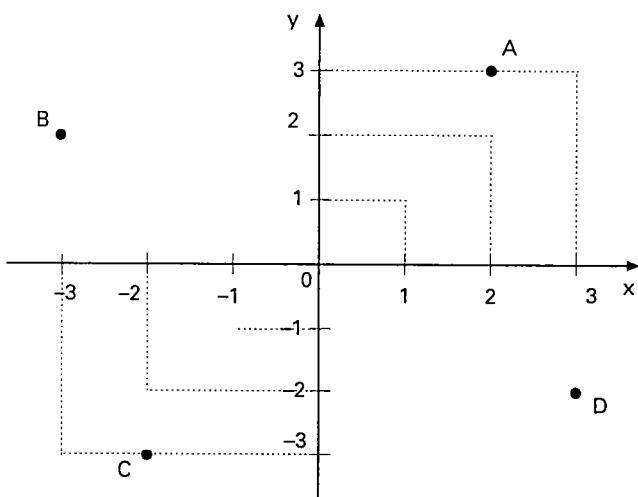
$x = 2(3) + 1 \therefore x = 6 + 1 \therefore x = 7$

Resp.: 7 e 3

Exercícios

1) A soma de dois números é 14; um deles excede o triplo do outro de 2. Quais são esses números?

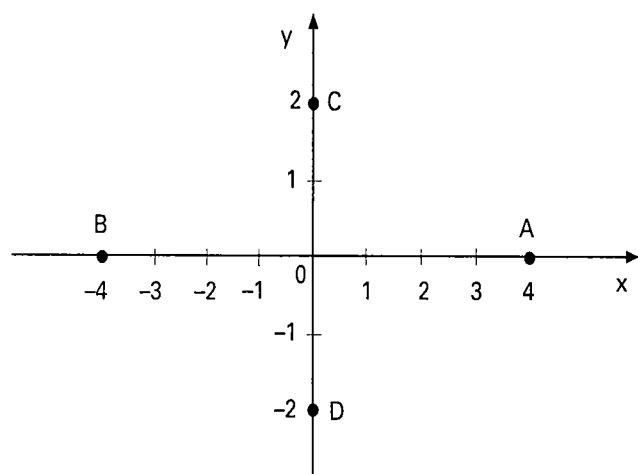
2) A soma do numerador e do denominador de uma fração é 13. O numerador excede o denominador de 3. Achar essa fração.

11 Representação Cartesiana

SÉRIE I

Representar no plano cartesiano os pontos:

1) A(3, 2), B(–2, 3), C(–3, –2) e D(2, –3)
2) A(4, 2), B(–4, 2), C(–2, –4) e D(2, –4)

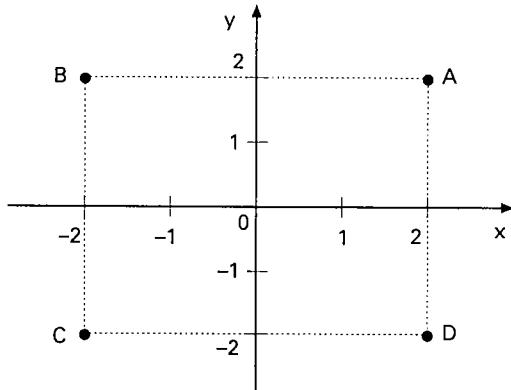
Exemplo: A(2, 3), B(–3, 2), C(–2, –3) e D(3, –2)

Representação:

SÉRIE II

Representar no plano cartesiano os pontos:

1) A(3, 0), B(–3, 0), C(0, 2) e D(0, –2)
2) A(5, 0), B(–5, 0), C(0, 3) e D(0, –3)

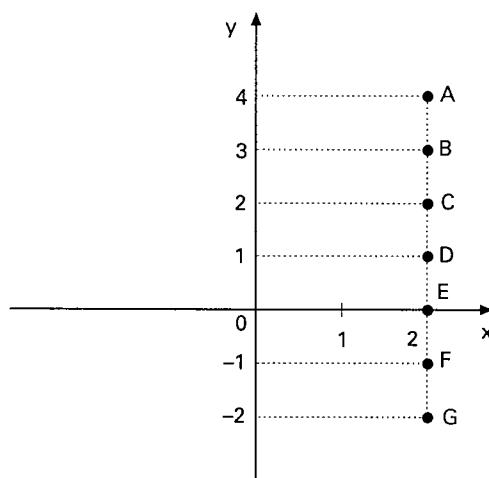
Exemplo: A(4, 0), B(–4, 0), C(0, 2) e D(0, –2)

Representação:

SÉRIE III

Representar no plano cartesiano os pontos:

1) A(3, 3), B(–3, 3), C(–3, –3) e D(3, –3)
2) A(4, 4), B(–4, 4), C(–4, –4) e D(4, –4)

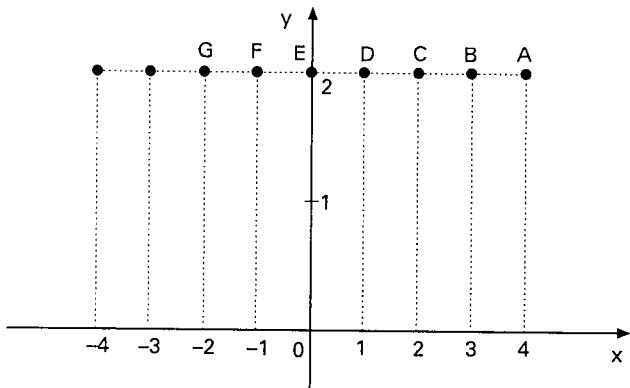
Exemplo: A(2, 2), B(–2, 2), C(–2, –2) e D(2, –2)

Representação:

SÉRIE IV

Representar no plano cartesiano os pontos:

1) A(3, 4), B(3, 3), C(3, 2), D(3, 1), E(3, 0), F(3, –1) e G(3, –2)
2) A(–3, 4), B(–3, 3), C(–3, 2), D(–3, 1), E(–3, 0), F(–3, –1) e G(–3, –2)

Exemplo: A(2, 4), B(2, 3), C(2, 2), D(2, 1), E(2, 0), F(2, –1) e G(2, –2)

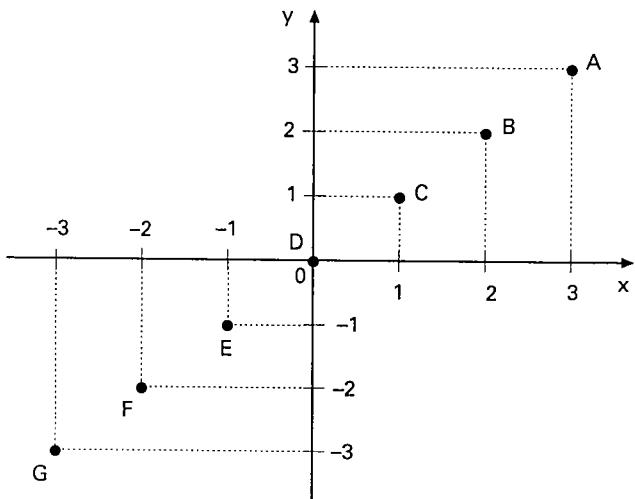
Representação:

SÉRIE V

Representar no plano cartesiano os pontos:

1) A(3, 4), B(2, 4), C(1, 4), D(0, 4), E(−1, 4), F(−2, 4) e G(−3, 4)

2) A(3, −4), B(2, −4), C(1, −4), D(0, −4), E(−1, −4), F(−2, −4) e G(−3, −4)

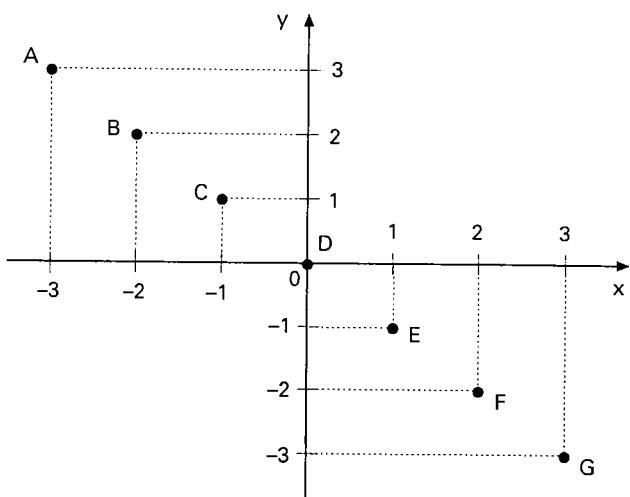
Exemplo: A(4, 2), B(3, 2), C(2, 2), E(0, 2), F(−1, 2) e G(−2, −2), H(−3, 2) e I(−4, 2)

Representação:

SÉRIE VI

Representar no plano cartesiano os pontos:

A(4, 4), B(3, 3), C(2, 2), D(1, 1), E(0, 0), F(−1, −1) e G(−2, −2)

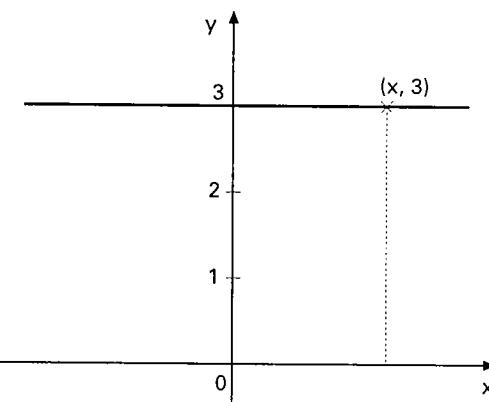
Exemplo: A(3, 3), B(2, 2), C(1, 1), D(0, 0), E(−1, −1), F(−2, −2) e G(−3, −3)

Representação:

SÉRIE VII

Representar no plano cartesiano os pontos:

A(−4, 4), B(−2, 2), C(0, 0), D(4, −4) e E(6, −6)

Exemplo: A(−3, 3), B(−2, 2), C(−1, 1), D(0, 0), E(1, −1), F(2, −2) e G(3, −2)

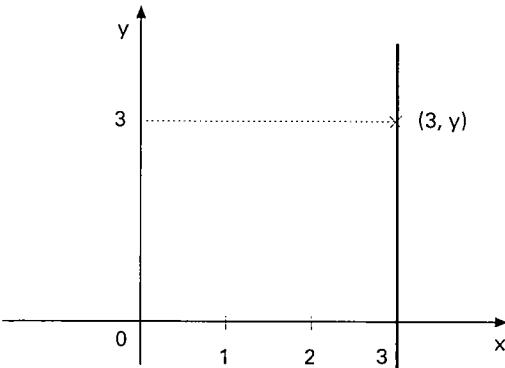
Representação:

SÉRIE VIII

Representar no plano cartesiano o gráfico de:

1) y = 4

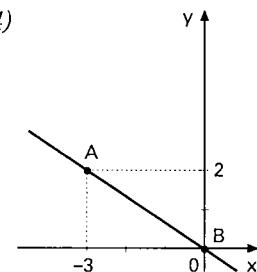
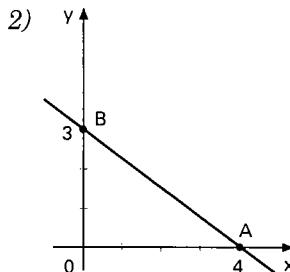
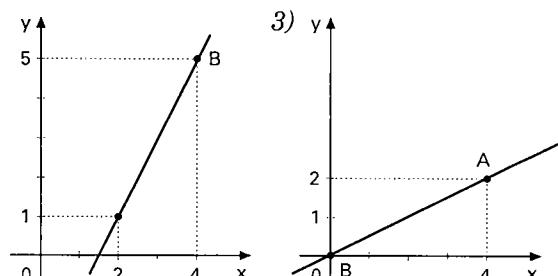
2) y = −2

Exemplo: y = 3

Representação: **O gráfico de y = 3 é uma *reta paralela* ao eixo dos x. Observar que todos os pontos dessa reta são da forma (x, 3), ou seja, a *ordenada* é *constante* e igual a 3.**

SÉRIE IX

Representar no plano cartesiano o gráfico de:

1) x = 4

2) x = −2

Exemplo: x = 3

Representação: **O gráfico de x = 3 é uma *reta paralela* ao eixo dos y. Observar que todos os pontos dessa reta são da forma (3, y), ou seja, a *abscissa* é *constante* e igual a 3.**

SÉRIE X

Exemplo: $y = 2x - 1$

Representação: **Prova-se que o gráfico de uma equação do 1º grau nas variáveis x e y: $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma reta não paralela a algum eixo coordenado.**

Assim, para representar o gráfico da equação $y = 2x - 1$, é suficiente marcar no plano cartesiano ortogonal dois de seus pontos.

Por exemplo,

para $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0 - 1 \therefore y = -1$
para $x = 3$, temos $y = 2 \cdot 3 - 1 \therefore y = 5$

x	y	pontos
0	−1	A(0, −1)
3	5	B(3, 5)

A equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, nas variáveis reais x e y é chamada *função do 1º grau.*

Em particular, se $b = 0$, a equação $y = ax$, com $a \neq 0$, é chamada *função linear.*

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal, ou seja, pelo ponto (0, 0).

Representar no plano cartesiano o gráfico da equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

1) $y = 2x + 1$
2) $y = -x + 3$
3) $y = 2x$
4) $y = -x$

SÉRIE XI

Dado o gráfico de uma função do 1º grau, determinar $y = ax + b$.

Exemplo:

Resolução:

Devemos obter a e b.

Prova-se que todo ponto de uma reta que é gráfico de uma função do 1º grau tem por coordenadas um par ordenado (x, y) de números reais que *verificam* a equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, que define essa função.

Como o ponto A(1, 3) pertence ao gráfico, então os números 1 e 3 verificam a equação $y = ax + b$, ou seja, $3 = a \cdot 1 + b \therefore a + b = 3$ (1).

Procedendo do mesmo modo com o ponto B(3, 5), temos:
$5 = a \cdot 3 + b \therefore 3a + b = 5$ (2).

Das equações (1) e (2) resulta o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 1$ e $b = 2$

Portanto, a equação procurada é *$y = x + 2$*.

SÉRIE XII

Determinar e representar o ponto de encontro das retas de equações:

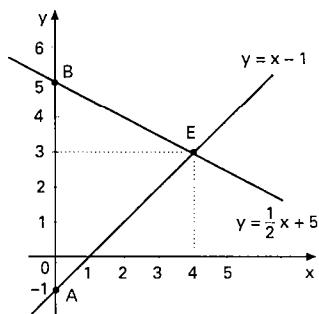
1) $y = 2x$ e $y = -x + 6$
2) $y = x + 1$ e $y = -2x + 4$

Exemplo: $y = x - 1$ **e** $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Resolução:

O ponto E de encontro das duas retas é aquele que satisfaz simultaneamente as equações dadas.
Para determinar o ponto E vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$

Comparando as duas equações, temos:

$$x - 1 = -\frac{1}{2}x + 5 \therefore$$
$$\therefore 2x - 2 = -x + 10 \therefore$$
$$\therefore 3x = 12 \therefore x = 4$$

Substituindo x = 4 na primeira equação, vem:

$$y = 4 - 1 \therefore y = 3$$

Logo, E(4, 3)
Representação gráfica:

Reta $y = x - 1$

x	y	pontos
0	-1	A(0, -1)
4	3	E(4, 3)

Reta $y = -\frac{1}{2}x + 5$

x	y	pontos
0	5	B(0, 5)
4	3	E(4, 3)

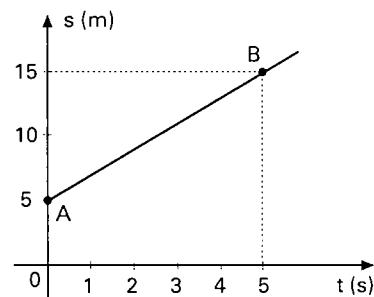
Função Horária do Espaço

A equação $s = s_0 + vt$ no estudo do movimento uniforme de um ponto material é *chamada função horária do espaço.* Esta função horária é uma função do 1º grau, onde:

s... é o espaço ou posição do corpo num dado instante (tempo).
s_0... é o espaço ou posição do corpo no instante $t = 0$.
$v (v \neq 0)$... é a velocidade escalar constante.

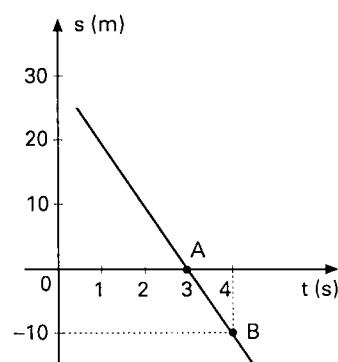
SÉRIE XIII

Exemplo: $s = 5 + 2t$
s medido em metros
t medido em segundos

Resolução:

Sendo a função do 1º grau, seu gráfico é uma reta não paralela aos eixos de coordenadas.

Obtenção de dois pontos:

para $t = 0$, $s = 5 + 2 \cdot 0 \therefore s = 15$
para $t = 5$, $s = 5 + 2 \cdot 5 \therefore s = 15$

t	s	pontos
0	5	A(0, 5)
5	15	B(5, 15)

Exercícios

Dada a função horária do espaço do movimento de um corpo, representar o gráfico dessa função:

1) $s = 8 + 4t$
2) $s = 15 - 5t$
3) $s = -4 + 10t$
4) $s = -12t$

SÉRIE XIV

Exemplo:

Resolução:

Devemos obter s_0 e v.

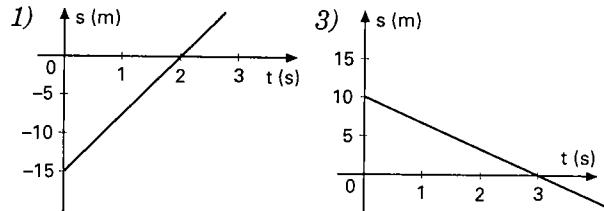
Sejam A(3, 0) e B(4, −10) os pontos da reta do gráfico.

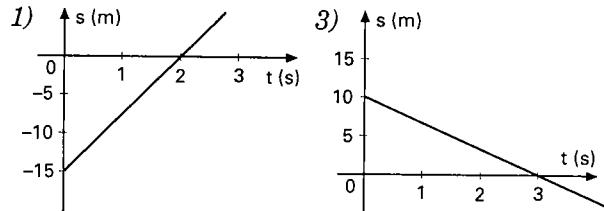
Procedendo do mesmo modo que na série XI, da equação $s = s_0 + vt$, temos:

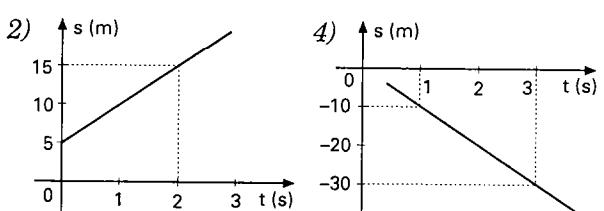
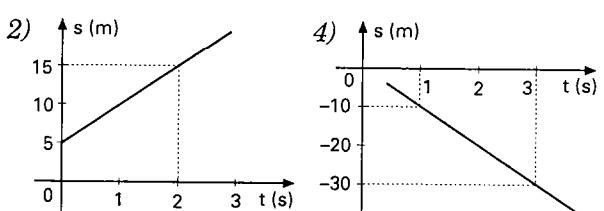
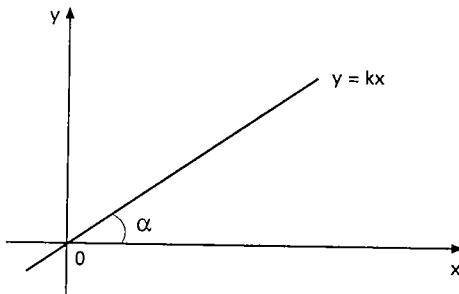
Ponto A: $0 = s_0 + v \cdot 3 \therefore 3v + s_0 + 0$ (1)

Ponto B: $-10 = s_0 + v \cdot 4 \therefore 4v + s_0 = -10$ (2)

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3v + s_0 = 0 \\ 4v + s_0 = -10 \end{cases}$$

obtemos $v = -10$ e $s_0 = 30$.

Portanto, a equação procurada é $s = 30 - 10t$.

Exercícios

Dado o gráfico de uma função horária do espaço do movimento uniforme de um corpo, determinar $s = s_0 + vt$.

12 Grandezas Proporcionais

1. Grandezas Diretamente Proporcionais

Diz-se que as grandezas x e y são diretamente proporcionais se assim estiverem relacionadas:

$$y = kx \text{ ou } \frac{y}{x} = k, k > 0$$

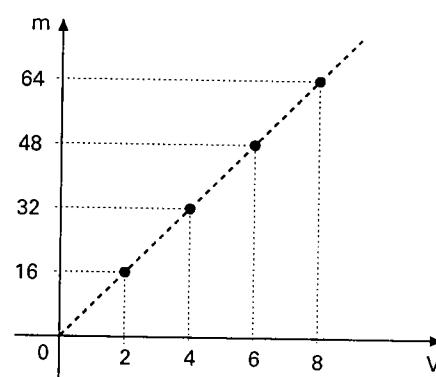
onde k é uma *constante positiva*, chamada constante de proporcionalidade.

O gráfico que representa a relação y = kx é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal.

> **➥ Notas**
> 1. A relação y = kx é uma função linear.
> 2. A constante k é a tangente trigonométrica da inclinação α (k = tg α), $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, da reta em relação ao eixo dos x.

Exemplo:

De várias porções de uma mesma substância foram determinadas as massas e seus respectivos volumes. Os resultados estão relacionados na tabela abaixo.

Observe na tabela que a um volume maior corresponde uma massa maior. Dobrando o volume, dobra também a massa; triplicando o volume, triplica a massa, e assim por diante.

Volume (cm^3)	*Massa (g)*
2	16
4	32
6	48
8	64

As grandezas volume e massa são diretamente proporcionais ou, então, que a massa é diretamente proporcional ao volume, de acordo com a definição.

Nesse caso, a razão da massa e do volume é constante igual a 8 g/cm^3.

$$\frac{m}{V} = \frac{16}{2} = \frac{32}{4} = \frac{48}{6} = \frac{64}{8} = \ldots = 8\,g/cm^3$$

O gráfico é constituído de quatro pontos colineares com a origem 0.

SÉRIE I

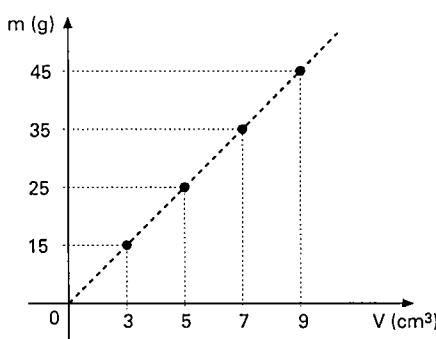
Exemplo: Várias porções de uma mesma substância foram medidas. Na tabela abaixo estão relacionados suas massas e seus volumes.

Volume (cm^3)	*Massa (g)*
3	15
5	25
7	35
9	45

a) **Estas grandezas são diretamente proporcionais?**

b) **Qual a constante de proporcionalidade?**

c) **Esboçar o gráfico da relação volume e massa.**

Resolução:

a) **As grandezas massa e volume são diretamente proporcionais, pois:**

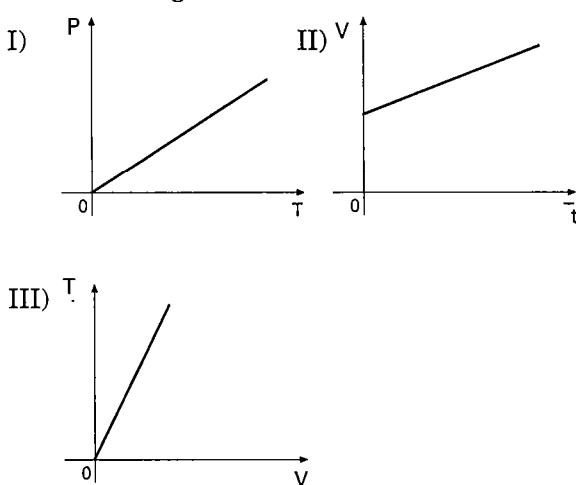
$$\frac{m}{V} = \frac{15}{3} = \frac{25}{5} = \frac{35}{7} = \frac{45}{9} = 5$$

b) **A constante de proporcionalidade é 5 g/cm^3.**

c) **O gráfico da relação massa e volume consta de quatro pontos da**

semi-reta com origem 0, e obedece à equação:

$$\frac{m}{V} = 5 \quad \therefore \quad m = 5V$$

Exercícios

1) Várias porções de uma mesma substância foram medidas. Na tabela abaixo estão relacionados suas massas e seus volumes.

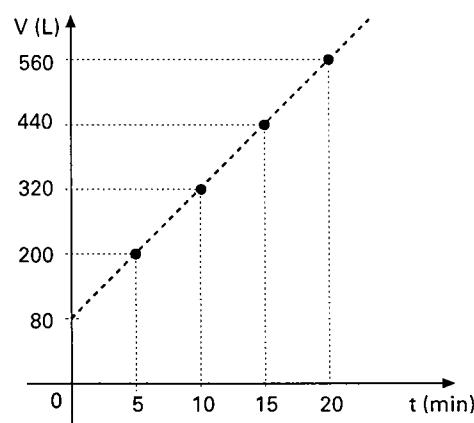
Volume (cm³)	*Massa (g)*
5	20
7	28
9	36
10	40

a) Estas grandezas são diretamente proporcionais?
b) Qual a constante de proporcionalidade?
c) Esboçar o gráfico da relação massa e volume.

2) Duas grandezas P e H estão relacionadas conforme a tabela abaixo:

P	12	24	36	42
H	2	4	6	7

a) As grandezas P e H são diretamente proporcionais?
b) Achar a constante de proporcionalidade k, na relação H = kP.
c) Esboçar o gráfico da relação H = kP.

3) Considere os gráficos abaixo:

a) Quais dos gráficos representam grandezas diretamente proporcionais?
b) Quais as relações correspondentes?

Considere a experiência:

Um reservatório contendo certa quantidade de água é alimentado por uma torneira; uma pessoa mede o volume de água em vários instantes a partir do instante t = 0 minutos. Os volumes e os instantes correspondentes foram relacionados conforme a tabela abaixo, bem como o gráfico da relação entre V e t.

t (min)	V (L)
5	200
10	320
15	440
20	560

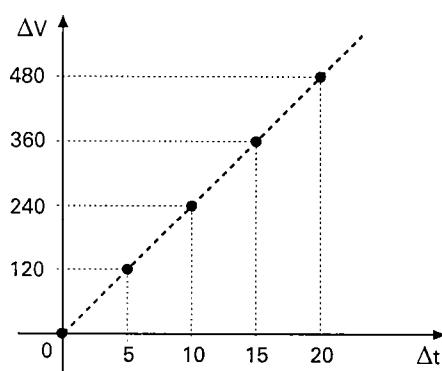
As grandezas volume e tempo *não são* diretamente proporcionais, pois:

$$\frac{200}{5} \neq \frac{320}{10} \neq \frac{440}{15} \neq \frac{560}{20}$$

O gráfico que representa a relação V e t é constituído por quatro pontos de uma semireta que não passa pela origem.

O volume de água no instante t = 0 é V = 80, conforme o gráfico (Repare que a marcação de tempo começou quando o reservatório continha uma certa quantidade de água).

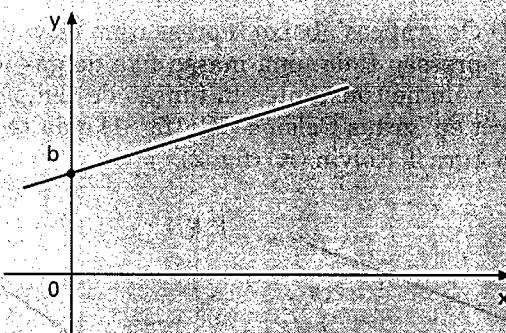
Vamos agora montar uma tabela colocando a *variação do volume* e as *variações de tempo* correspondentes.

Δt (min)	ΔV (L)
5 = (5 – 0)	120 = (200 – 80)
10 = (10 – 0)	240 = (320 – 80)
15 = (15 – 0)	360 = (440 – 80)
20 = (20 – 0)	480 = (560 – 80)

Observe que:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{120}{5} = \frac{240}{10} = \frac{360}{15} = \frac{480}{20} = 24\,L/min$$

Conclusão: As grandezas ΔV e Δt são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k = 24L/min. O gráfico da relação

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = k \therefore \Delta V = k \cdot \Delta t$$

está representado na figura abaixo.

Observação

Quando o gráfico de uma grandeza (y) em relação a outra (x) é uma reta que não passa pela origem, a equação da reta é da forma:

$$y = kx + b$$

onde k é a constante de proporcionalidade e b é o valor de y para x = 0.

As grandezas x e y não são diretamente proporcionais.
As variações Δx e Δy são grandezas diretamente proporcionais.

SÉRIE II

Exemplo: Duas grandezas P e H são relacionadas conforme a tabela:

P	24	38	52	59
H	2	4	6	7

a) As grandezas P e H são diretamente proporcionais? Justificar.

b) As variações ΔP e ΔH das grandezas P e H são grandezas diretamente proporcionais? Justificar.

c) Construir o gráfico de P em relação a H.

d) Qual a constante de proporcionalidade k na relação $\Delta P = k\Delta H$?

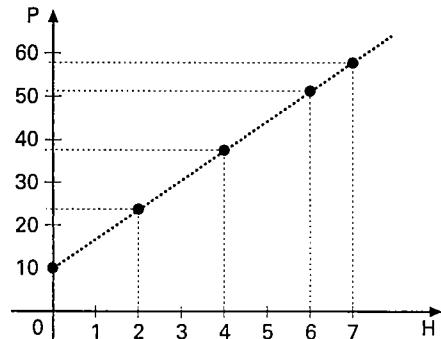
e) Qual a equação de P em relação a H?

Resolução:

a) $\frac{P}{H} = \frac{24}{2} \neq \frac{38}{4} \neq \frac{52}{6} \neq \frac{59}{7}$, como $\frac{P}{H}$ não é constante, então as grandezas P e H não são diretamente proporcionais.

b) Vamos construir uma tabela com ΔP e ΔH.

$\Delta P = 38 - 24 = 14$ e $\Delta H = 4 - 2 = 2$

$\Delta P = 52 - 24 = 28$ e $\Delta H = 6 - 2 = 4$

$\Delta P = 59 - 24 = 35$ e $\Delta H = 7 - 2 = 5$

ΔP	14	28	35
ΔH	2	4	5

Assim, a razão:

$\frac{\Delta P}{\Delta H} = \frac{14}{2} = \frac{28}{4} = \frac{35}{5} = 7$ é constante e então as grandezas ΔP e ΔH são diretamente proporcionais.

c) O gráfico da relação entre P e H é:

d) A constante de proporcionalidade na relação $\Delta P = k \cdot \Delta H$ é

$\frac{\Delta P}{\Delta H} = k = 7$ (conforme o item b).

e) A equação de P em relação a H é:

$$P = 7H + b \quad (1)$$

Da tabela, para H = 2, temos P = 24. Substituindo esses valores na equação (1), resulta:

$24 = 7 \cdot 2 + b \therefore 14 + b = 24 \therefore$

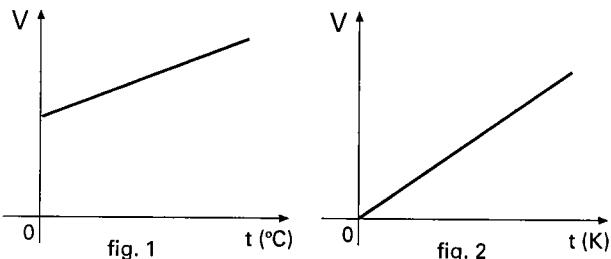
$\therefore b = 24 - 14 \therefore b = 10$

Logo, a equação pedida é:

$$P = 7H + 10$$

Exercícios

1) Duas grandezas A e B estão relacionadas conforme tabela:

A	26	32	38	47
B	2	4	6	9

a) As grandezas A e B são diretamente proporcionais? Justificar.
b) As variações ΔA e ΔB das grandezas A e B são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.
c) Construir o gráfico de A em relação a B.
d) Qual a constante de proporcionalidade k na relação $\Delta A = k \cdot \Delta B$.
e) Qual a equação de A em relação a B?

2) Duas grandezas V e T são relacionadas conforme tabela:

V	20	28	36	44
T	3	5	7	9

a) As grandezas V e T são diretamente proporcionais? Justificar.
b) As variações ΔV e ΔT das grandezas V e T são grandezas diretamente proporcionais? Justificar.

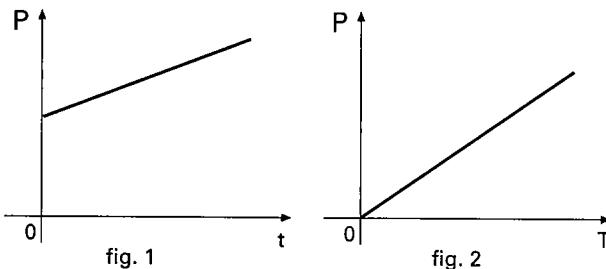
SÉRIE III

Exemplo: Os gráficos abaixo representam os valores do volume V de uma massa fixa de um gás ideal, sob pressão constante em função da temperatura t em graus Celsius (°C) (fig. 1) e da temperatura T Kelvin (K) (fig. 2).

Com base nas informações dadas, responda:

***a)* O volume V é diretamente proporcional à temperatura t em graus Celsius (°C)?**
***b)* O volume V é diretamente proporcional à temperatura T Kelvin (K)?**
***c)* A variação ΔV de volume é diretamente proporcional à variação Δt da temperatura em graus Celsius (°C)?**
***d)* A variação ΔV de volume é diretamente proporcional à variação ΔT da temperatura Kelvin (K)?**
***e)* Se o volume do gás a 70K é 175 litros, qual o seu volume a 180K?**

Resolução:

***a)* A reta não passa pela origem (fig. 1); portanto o volume V não é diretamente proporcional à temperatura t em graus Celsius (°C).**
***b)* A reta passa pela origem do sistema (fig. 2); portanto o volume V é diretamente proporcional à temperatura T Kelvin (K).**
***c)* Sim**
***d)* Sim**
***e)* Sendo o volume diretamente pro porcional à temperatura T Kelvin (K), temos:**

$$\frac{V}{T} = \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \ldots = k$$

ou seja,

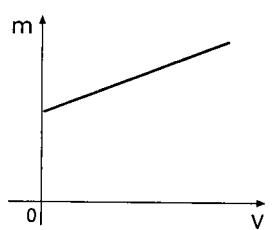
$$\frac{V}{180} = \frac{175}{70} \therefore V = \frac{180 \times 175}{70} \therefore$$

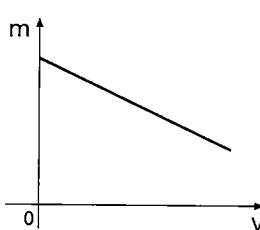
$$\therefore V = 450 \text{ litros}$$

Exercícios

1) Os gráficos abaixo representam os valores da pressão P de uma massa fixa de gás ideal, a volume constante em função da temperatura t em graus Celsius (°C) (fig. 1) e da temperatura T Kelvin (K) (fig. 2).

Com base nas informações dadas, responda:

a) A pressão P é diretamente proporcional à temperatura t em graus Celsius (°C)?
b) A pressão P é diretamente proporcional à temperatura T Kelvin (K)?
c) A variação ΔP da pressão é diretamente proporcional à variação Δt da temperatura em graus Celsius (°C)?
d) A variação ΔP da pressão é diretamente proporcional à variação ΔT da temperatura Kelvin (K)?
e) Se a pressão do gás a 200K é 10 atmosferas, então qual a pressão a 450K?

2) Vários blocos de minério, de tamanhos diferentes, foram medidos. Suas massas e respectivos volumes estão relacionados na tabela abaixo:

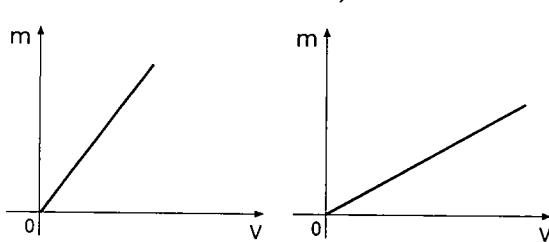
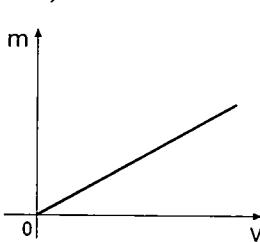
Massa (g)	*Volume* (cm^3)
20	5
30	7,5
60	15
70	17,5

Com base nas informações dadas, responda:

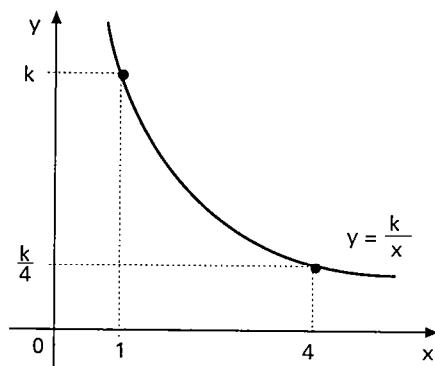
a) As grandezas relacionadas são diretamente proporcionais? Justificar.

b) Qual a massa, em gramas, correspondente a um bloco de volume 25 cm^3?

c) Qual o volume, em cm^3, correspondente a um bloco de massa 50 g?

d) Qual a constante de proporcionalidade k na relação m = kV?

e) Qual dos gráficos abaixo melhor representa a relação entre massa (m) e volume (V) nessa experiência?

3) Considere as grandezas A e B. Multiplicando-se A por 2 verifica-se que B fica multiplicada por 2. Podemos então concluir que as grandezas A e B são diretamente proporcionais?

4) Considere as grandezas X e Y. Verifica-se que aumentando a grandeza X, a grandeza Y também aumenta. Podemos então concluir que as grandezas X e Y são diretamente proporcionais?

2. Grandezas Inversamente proporcionais

Diz-se que as grandezas x e y são inversamente proporcionais se assim estiverem relacionadas:

$$x \cdot y = k, \text{ ou } y = \frac{k}{x}, (k > 0)$$

onde k é uma *constante positiva*, chamada constante de proporcionalidade inversa.

O gráfico que representa a relação $y = \frac{k}{x}$ é um *ramo de hipérbole eqüilátera.*

Exemplo:

Numa competição de Fórmula 1, os tempos gastos pelos competidores para completar uma volta foram registrados numa tabela e também as suas respectivas velocidades médias:

piloto	tempo (min)	velocidade (km/h)
1	6	180
2	5,4	200
3	4,8	225
4	4,5	240

Com base na tabela, concluímos que:

1º) A uma *velocidade maior* corresponde um *tempo menor*; então as grandezas *velocidade* e *tempo* não são diretamente proporcionais.

De fato, $\frac{180}{6} \neq \frac{200}{5,4}$, por exemplo.

2º) Por outro lado, $6 \times 180 = 5,4 \times 200 = 4,8 \times 225 = 4,5 \times 240 = 1\,080$. De acordo com a definição, as grandezas velocidade e tempo são *inversamente proporcionais*, e o número 1 080 é a constante de proporcionalidade inversa.

SÉRIE IV

Exemplo: Sobre uma mola, são colocados corpos de pesos diferentes e verifica-se que o comprimento da mola, em função do peso do corpo colocado sobre ela, é dado pela tabela abaixo:

corpo	**peso (kgf)**	**comprimento da mola (cm)**
1	**5**	**48**
2	**10**	**24**
3	**15**	**16**
4	**20**	**12**

Com base nas informações dadas, responda:

a) O peso P e o comprimento da mola L são grandezas inversamente proporcionais? Justificar.

b) A variação ΔP de peso e a variação ΔL de comprimento da mola são grandezas diretamente proporcionais? Justificar.

Resolução:

a) O peso P e o comprimento da mola L *são* grandezas inversamente proporcionais, pois o produto $P \cdot L$ é constante e igual a $240 \text{kgf} \times \text{cm}$.

$P \cdot L = 5 \times 48 = 10 \times 240 = 15 \times 16 =$
$= 20 \times 12 = 240 \text{kgf} \times \text{cm}$

b) A variação ΔP de peso e a variação ΔL de comprimento da mola *não são* grandezas diretamente proporcionais, pois a razão $\frac{\Delta P}{\Delta L}$ não é constante.

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = \frac{5}{24} \neq \frac{5}{8} \neq \frac{5}{4}$$

Note que:

$\Delta P = 10 - 5 = 5$ e $\Delta L = 48 - 24 = 24$

$\Delta P = 15 - 10 = 5$ e $\Delta L = 24 - 16 = 8$

$\Delta P = 20 - 15 = 5$ e $\Delta L = 16 - 12 = 4$

Exercícios

1) A tabela reúne os valores da densidade (d) de um certo gás, sob pressão constante, em diferentes temperaturas T Kelvin (K):

densidade (mg/L)	temperatura (K)
100	300
75	400
60	500
50	600

Com base nas informações dadas, responda:

a) A densidade d e a temperatura T Kelvin são grandezas inversamente proporcionais? Justificar.

b) A variação Δd de densidade e a variação ΔT de temperatura Kelvin são grandezas diretamente proporcionais? Justificar.

2) Considere as grandezas X e Y. Verifica-se que multiplicando X por 4 a grandeza Y fica dividida por 4. Podemos concluir que as grandezas X e Y são inversamente proporcionais?

3) Considere as grandezas A e B. Verifica-se que quando A aumenta, B diminui. Podemos concluir que as grandezas A e B são inversamente proporcionais?

SÉRIE V

Exemplo: A tabela seguinte reúne valores dos volumes V de uma massa fixa de um gás ideal, a temperatura constante, sob diferentes pressões.

pressão (atm)	volume (L)
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2

Com base nas informações dadas, responda:

a) A pressão P e o volume V são grandezas:

☐ **diretamente proporcionais.**

☐ **inversamente proporcionais.**

☐ **não proporcionais.**

b) A variação ΔP de pressão e a variação ΔV de volume são grandezas:

☐ **diretamente proporcionais.**

☐ **inversamente proporcionais.**

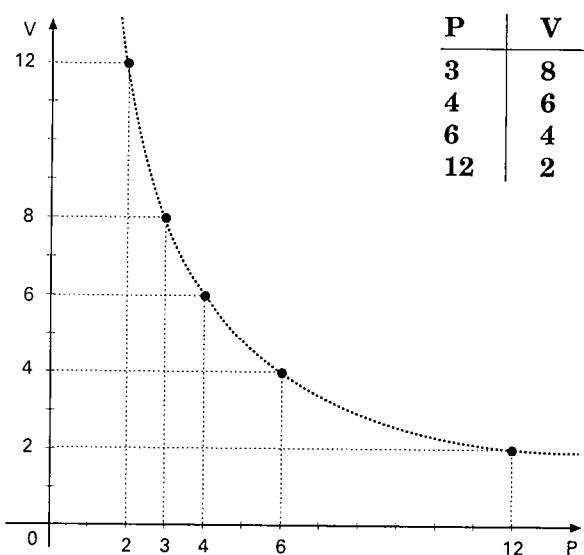
☐ **não proporcionais.**

c) Esboçar o gráfico do volume em função da pressão.

d) Qual será o volume ocupado pelo gás quando a pressão for igual a 2 atm?

e) Qual será a pressão exercida pelo gás quando o volume for igual a 24 L?

Resolução:

a) A pressão P e o volume V são grandezas inversamente proporcionais, pois
$P \cdot V = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 8 \times 3 =$
$= 12 \times 2 = 24 \text{ atm} \times \text{L}$.

b) A variação ΔP de pressão e a variação ΔV de volume não são grandezas proporcionais, pois

$\Delta P \times \Delta V = 1 \times 2 \neq 2 \times 2$ e

$\frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{2}$**, por exemplo.**

c) **O gráfico do volume V em função da pressão P consta de cinco pontos de um ramo de hipérbole.**

P	V
3	8
4	6
6	4
12	2

d) $\mathbf{PV = k \therefore 2V = 24 \therefore V = 12L}$

e) $\mathbf{PV = k \therefore P \cdot 24 = 24 \therefore P = 1\ atm}$

Exercícios

1) A tabela seguinte reúne os valores da velocidade média v, de modo que uma pessoa dirigindo o seu carro vá de uma cidade A a uma cidade B, em diferentes tempos t.

v (km/h)	t (hora)
60	1,5
75	1,2
80	1,125
90	1
100	0,9
120	0,75

Com base nas informações dadas, responda:

a) A velocidade v e o tempo t são grandezas:

I – ☐ diretamente proporcionais.

II – ☐ inversamente proporcionais.

III – ☐ não proporcionais.

b) A variação Δv de velocidade e a variação Δt de tempo são grandezas:

I – ☐ diretamente proporcionais.

II – ☐ inversamente proporcionais.

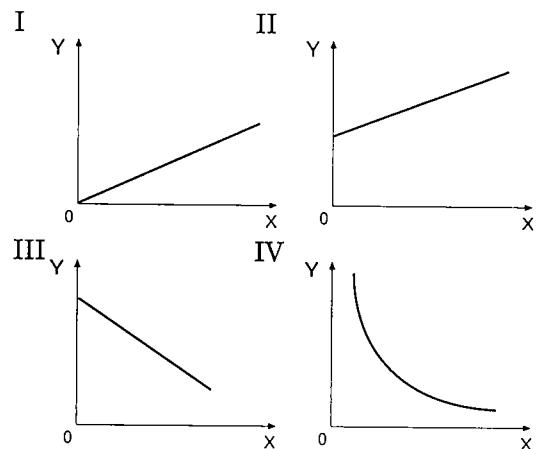
III – ☐ não proporcionais.

c) Esboçar o gráfico da velocidade em função do tempo.

d) Qual será a velocidade média que essa pessoa deve manter para ir de A até B em 50 minutos?

e) Quantos minutos serão gastos por essa pessoa para ir de A até B mantendo uma velocidade média de 75 km/h?

2) Analisando a relação entre as grandezas X e Y, verifica-se que o produto X · Y é constante. Podemos afirmar que:

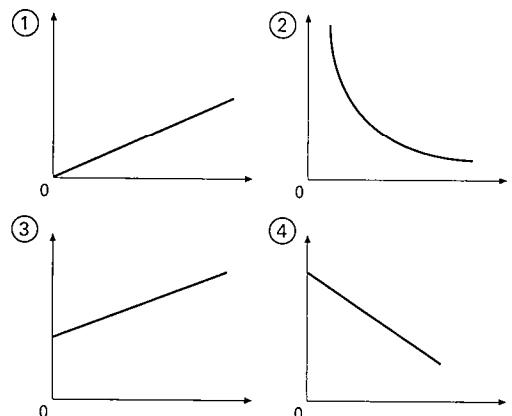
a) As grandezas X e Y são diretamente proporcionais.

☐ certo ☐ errado

b) As grandezas X e Y são inversamente proporcionais.

☐ certo ☐ errado

c) Nada podemos afirmar sobre as grandezas X e Y.

☐ certo ☐ errado

d) O gráfico que melhor representa a relação entre as grandezas X e Y é:

Considere a tabela e os quatro gráficos abaixo para responder aos exercícios 3 e 4.

A	3	9	15
B	1	3	5

C	13	25	29
D	2	5	6

E	4	6	12
F	9	6	3

3) Responda:

a) Considerando as grandezas A e B, temos que:

I – ☐ são diretamente proporcionais.

II – ☐ são inversamente proporcionais.

III – ☐ nenhum dos casos acima.

b) Considerando as grandezas C e D, temos que:

I – ☐ são diretamente proporcionais.

II – ☐ são inversamente proporcionais.

III – ☐ têm variações diretamente proporcionais.

IV – ☐ nenhum dos casos acima.

c) Considerando as grandezas E e F, temos que:

I – ☐ são diretamente proporcionais.

II – ☐ são inversamente proporcionais.

III – ☐ têm variações diretamente proporcionais.

IV – ☐ nenhum dos casos acima.

4) Responda:

a) Qual a constante de proporcionalidade entre as grandezas A e B?

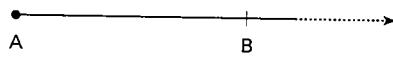
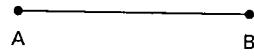
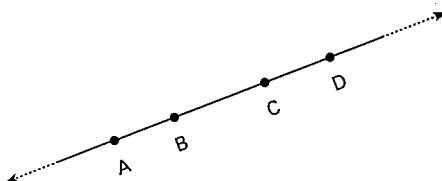
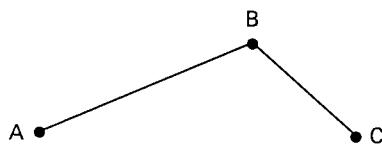
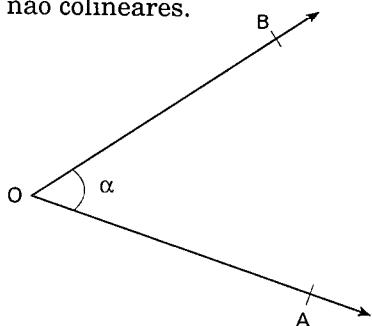
b) Qual a constante de proporcionalidade entre as variações da grandeza C e as variações da grandeza D?

c) Qual a constante de proporcionalidade entre as grandezas E e F?

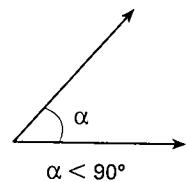
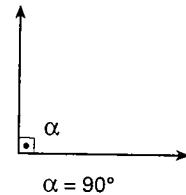
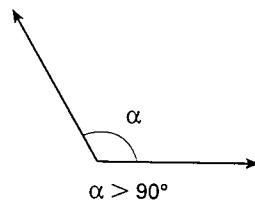
d) Qual o gráfico que representa a dependência entre as grandezas A e B?

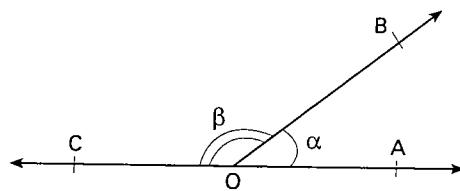
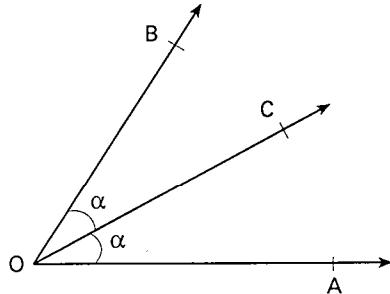
e) Qual o gráfico que representa a dependência entre as grandezas C e D?

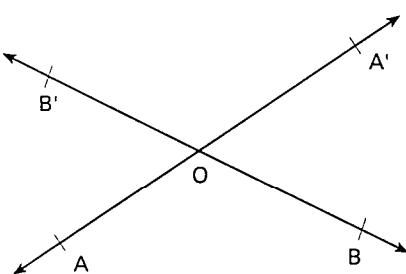
f) Qual o gráfico que representa a dependência entre as grandezas E e F?

13 Noções de Geometria Plana

- *Reta* determinada pelos pontos A e B.
  Indica-se: $\overleftrightarrow{AB}$

- *Semi-reta* de origem no ponto A e que passa pelo ponto B.
  Indica-se: $\overrightarrow{AB}$

- *Segmento* de reta de extremidades A e B.
  Indica-se: $\overline{AB}$

- *Pontos colineares* ou *alinhados* são pontos que pertencem à mesma reta.
  Exemplo: Os pontos A, B, C, D, ... da figura

- *Dois segmentos consecutivos* são dois segmentos de extremidade comum.
  Exemplo: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ da figura:

- *Ângulo* é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Nomenclatura:

O ...... vértice
$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ ...... lados
∢ AOB ...... ângulo
$A\hat{O}B = \alpha$ ...... medida em graus

- *Ângulo agudo*

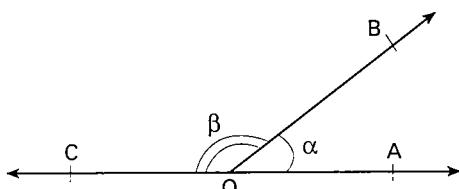
- *Ângulo reto*

- *Ângulo obtuso*

- *Dois ângulos adjacentes* são dois ângulos de mesmo vértice que têm um lado comum e os outros dois lados são semi-retas opostas.

  Exemplo: Os ângulos AOB e BOC de medidas α e β são ângulos adjacentes.

- *Bissetriz de um ângulo* é a semi-reta de origem no vértice desse ângulo que determina dois ângulos consecutivos de mesma medida.

  Exemplo: Na figura a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AOB.

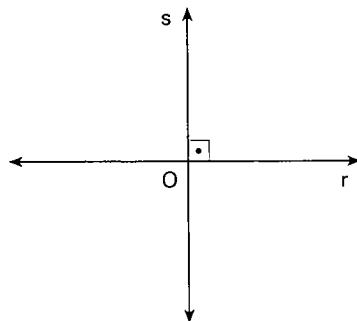
- *Ângulos opostos pelo vértice* são ângulos de vértice comum e os lados de um deles são semi-retas opostas aos lados do outro.

  Exemplo: Na figura os ângulos AOB e A'OB' são opostos pelo vértice.

- *Dois ângulos complementares* são dois ângulos cujas medidas somam 90°.

  Exemplo: 30° e 60°.

- *Dois ângulos suplementares* são dois ângulos cujas medidas somam 180°.

  Exemplo: 80° e 100°.

- *Dois ângulos adjacentes* são suplementares.

  Exemplo: Os ângulos adjacentes AOB e BOC conforme figura.

$\alpha + \beta = 180°$

- *Retas perpendiculares entre si* são duas retas concorrentes que formam ângulo reto.

  Exemplo: As retas r e s da figura são perpendiculares.

▪ *Ângulos*

SÉRIE I

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 35°
2) 40°
3) 60°
4) 75°

Exemplo: 20°
Devemos ter: 90° – 20° = 70°
***Resp.:* 70°**

SÉRIE II

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 70°
2) 95°
3) 60°
4) 135°

Exemplo: 50°
Devemos ter: 180° – 50° = 130°
***Resp.:* 130°**

SÉRIE III

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 43°25'
2) 61°13'
3) 72°47'
4) 83°09'

Exemplo: 37°14'

***1ºpasso:* Algoritmo**
$$\begin{array}{r} 90° \\ -\ 37°14' \\ \hline \end{array}$$

***2ºpasso:* 1° corresponde a 60'.**

***3ºpasso:* 90° = 89°60'.**

***4ºpasso:* Preparar e calcular:**
$$\begin{array}{r} 89°60' \\ -\ 37°14' \\ \hline 52°46' \end{array}$$

***Resp.:* 52°46'**

SÉRIE IV

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 43°25'18"
2) 61°13'27"
3) 72°47'13"
4) 83°09'52"

Exemplo: 37°14'36"

***1º passo:* 1' corresponde a 60"**

***2º passo:* Preparar e calcular:**

90°	89°60'	89°59'60"
-37°14'36"	**-37°14'36"**	**-37°14'36"**
		52°45'24"

***Resp.:* 52°45'24"**

SÉRIE V

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 73°28'
2) 85°36'
3) 100°12'
4) 147°41'

Exemplo: 37°46'

Devemos ter:

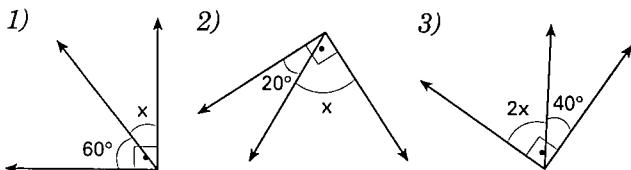
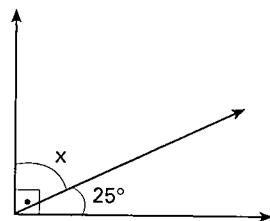
180°	179°60'
- 37°46'	**- 47°46'**
	132°14'

***Resp.:* 132°14'**

SÉRIE VI

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 73°28'47"
2) 85°26'19"
3) 100°12'32"
4) 147°41'08"

Exemplo: 37°46'38"

Devemos ter:

180°	179°60'	179°59'60"
- 37°46'38"	**- 37°46'38"**	**- 37°46'38"**
		142°13'22"

***Resp.:* 142°13'22"**

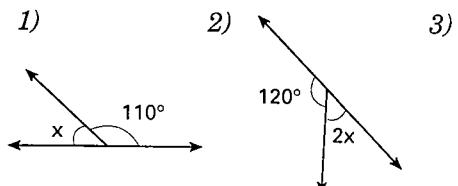
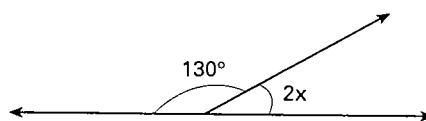
SÉRIE VII

Em cada figura calcular o valor de x:

1)

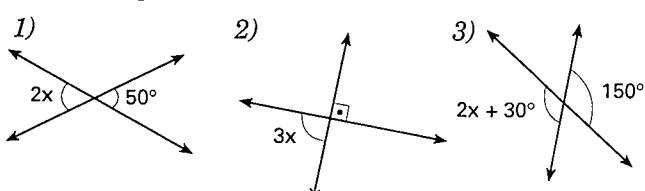
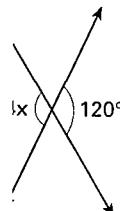
2)

3)

2x 40°

Exemplo:

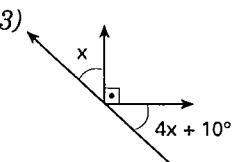
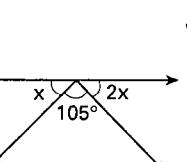
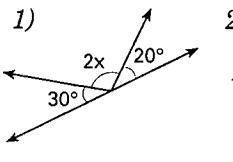
Os ângulos sendo adjacentes e complementares, devemos ter:
x + 25° = 90° ∴ x = 90° − 25° ∴ x = 65°
***Resp.:* x = 65°**

SÉRIE VIII

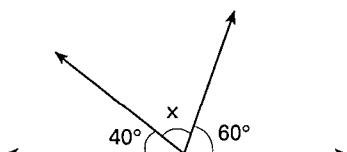
Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Os ângulos sendo adjacentes e suplementares, devemos ter:
2x + 130° = 180° ∴ 2x = 180° − 130° ∴
∴ 2x = 50° ∴ x = 25°
***Resp.:* x = 25°**

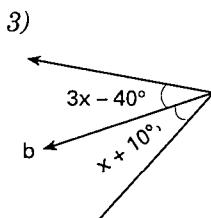
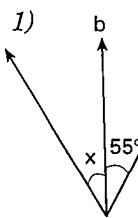
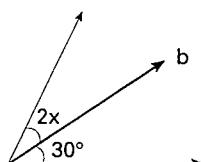
SÉRIE IX

Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Os ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.

Daí, 4x = 120° ∴ $x = \frac{120°}{4}$ **∴ x = 30°**

***Resp.:* x = 30°**

SÉRIE X

Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Devemos ter:

$40° + x + 60° = 180°$ ∴

∴ $x + 100° = 180°$ ∴ $x = 180° - 100°$

∴ $x = 80°$

***Resp.:* $x = 80°$**

SÉRIE XI

Em cada figura, a semi-reta b é bissetriz do ângulo; calcular o valor de x:

Exemplo:

Devemos ter:

$2x = 30°$ ∴ $x = \dfrac{30°}{2}$ ∴ $x = 15°$

***Resp.:* $x = 15°$**

SÉRIE XII

Resolva os problemas:

1) Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 40°. Achar as medidas dos ângulos.

2) Dois ângulos são complementares e a medida de um deles é o dobro da medida do outro. Quais são as medidas dos ângulos?

3) Dois ângulos são complementares e a razão das medidas é $\frac{3}{7}$. Achar as medidas dos ângulos.

Exemplo: Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 20°. Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 20° \end{cases}$$

$$2x = 110° \therefore x = \frac{110°}{2} \therefore x = 55°$$

Substituindo $x = 55°$ na primeira equação, vem:

$55° + y = 90°$ ∴ $y = 90° - 55°$ ∴ $y = 35°$

Resp.: 35° e 55°

SÉRIE XIII

Resolver os problemas:

1) Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao dobro da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.

2) Dois ângulos são suplementares e a medida de um excede a do outro de 70°. Quais são as medidas dos ângulos?

3) Dois ângulos são suplementares e a razão das medidas é 3/7. Quais são as medidas dos ângulos?

Exemplo: Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao triplo da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

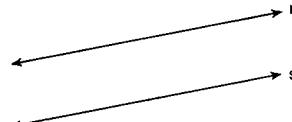
Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 180° & (1) \\ x = 3y & (2) \end{cases}$$

Substituir (2) em (1), temos:

$3y + y = 180°$ ∴ $4y = 180°$ ∴

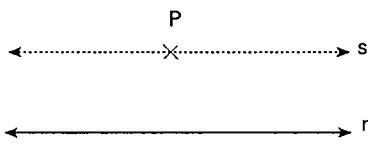
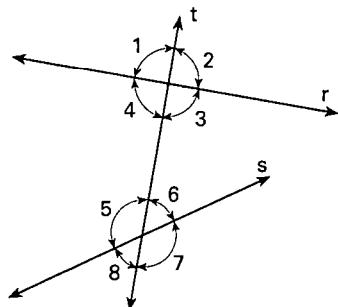
$$\therefore y = \frac{180°}{4} \therefore y = 45°$$

Substituindo $y = 45°$ em (2), vem:

$x = 3 \cdot 45°$ ∴ $x = 135°$

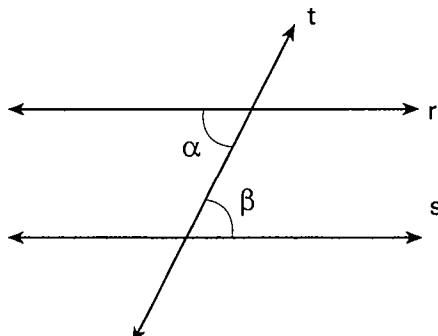
***Resp.:* 45° e 135°**

▪ *Retas paralelas*

a) Definição: Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, são coplanares e não têm ponto comum.

Indica-se: $r \parallel s$ e $r \neq s$

> **➥ Nota**
>
> Retas coplanares são retas de um mesmo plano.

b) Postulado das paralelas (Euclides)

Por um ponto fora de uma reta, existe uma e apenas uma reta paralela à reta dada.

c) Duas retas interceptadas por uma transversal

Na figura, as retas r e s são interceptadas por uma reta transversal.

Nomenclatura:

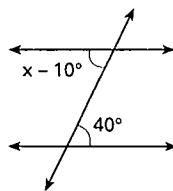
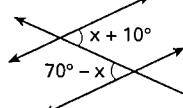
- ângulos alternos internos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{3} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{6} \end{array} \right.$

- ângulos alternos externos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{array} \right.$

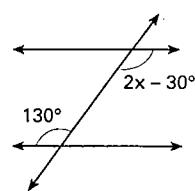
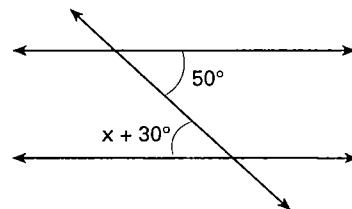
- ângulos correspondentes $\left\{ \begin{array}{ll} \hat{1} \text{ e } \hat{5} & \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} & \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$

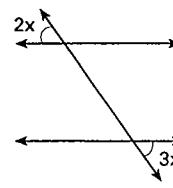
- ângulos colaterais internos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{array} \right.$

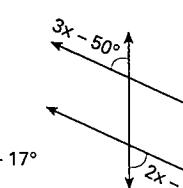
- ângulos colaterais externos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$

d) Propriedade

$\left. \begin{array}{l} r \,//\, s,\ r \neq s \\ \textbf{t é transversal} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

SÉRIE I

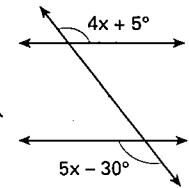
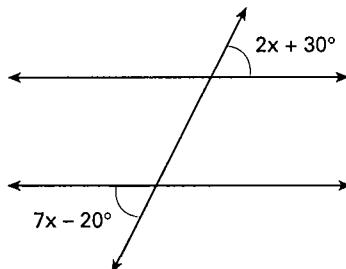
Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

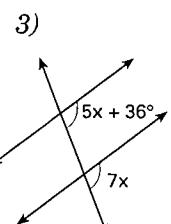
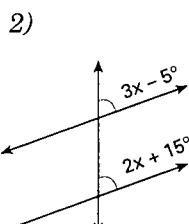
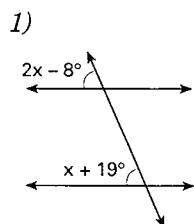
Devemos ter os ângulos alternos internos de medidas iguais:

$x + 30° = 50° \ \therefore \ x = 50° - 30° \ \therefore \ 20°$

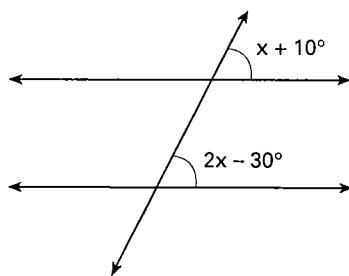
***Resp.:* x = 20°**

SÉRIE II

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

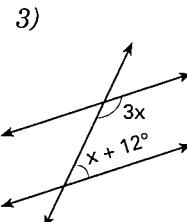
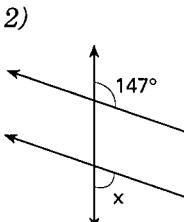
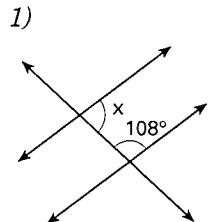
1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter os ângulos alternos externos de medidas iguais:

$\mathbf{7x - 20° = 2x + 30° \ \therefore}$

$\mathbf{\therefore \ 7x - 2x = = 30° + 20° \ \therefore}$

$\mathbf{\therefore \ 5x = 50° \ \therefore \ x = 10°}$

***Resp.:* x = 10°**

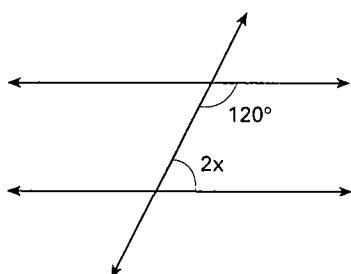
SÉRIE III

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

Exemplo:

Devemos ter os ângulos correspondentes de medidas iguais:

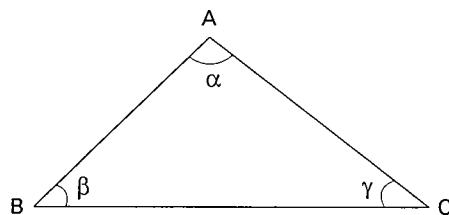
$2x - 30° = x + 10° \therefore$

$\therefore 2x - x = 10° + 30° \therefore$

$\therefore x = 40°$

***Resp.:* x = 40°**

SÉRIE IV

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

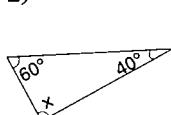
Exemplo:

Os ângulos colaterais internos são suplementares. Devemos ter:

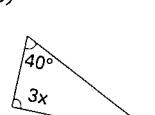
$2x + 120° = 180° \therefore 2x = 180° - 120° \therefore$

$\therefore 2x = 60° \therefore x = 30°$

***Resp.:* x = 30°**

▪ *Triângulos*

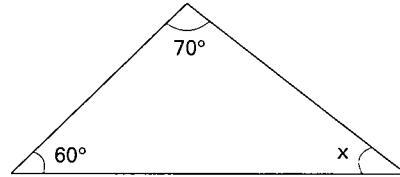
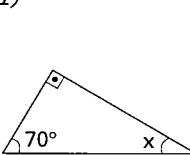
P.1) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

No triângulo ABC da figura, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

SÉRIE I

Em cada triângulo calcular o valor de x:

1)

2)

3)

Exemplo:

Devemos ter:

$x + 60° + 70° = 180° \therefore x + 130° =$

$= 180° \therefore x = 180° - 130° \therefore x = 50°$

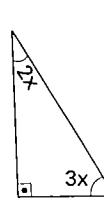
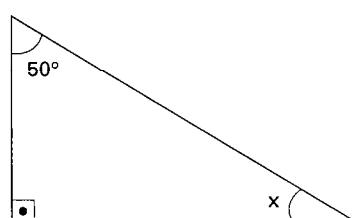
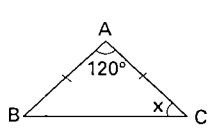
***Resp.:* x = 50°**

SÉRIE II

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

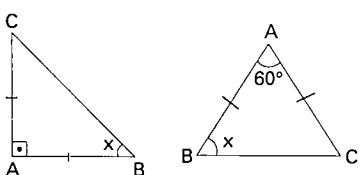
1)

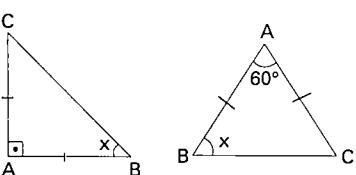
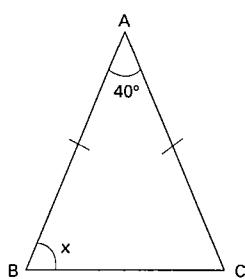
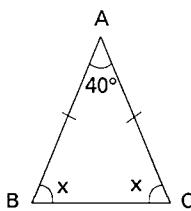
2)

3)

Exemplo:

Devemos ter:

$x + 50° = 90° \therefore x = 90° - 50° \therefore x = 40°$

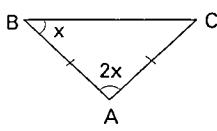
***Resp.:* x = 40°**

SÉRIE III

Em cada triângulo isósceles AB = AC, calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Num triângulo isósceles, os ângulos da base (lado desigual) têm medidas iguais.

Devemos ter:

$\hat{B} = \hat{C} = x$ **e**

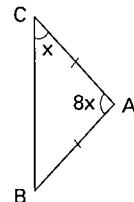
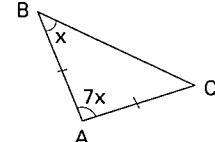
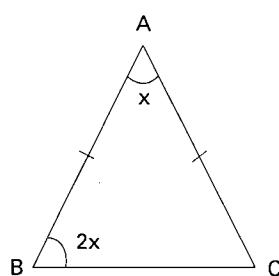
portanto :

$\mathbf{x + x + 40° = 180° \therefore 2x = 180° - 40° \therefore}$

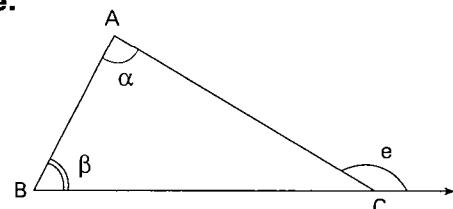
$\mathbf{\therefore\ 2x = 140° \therefore x = 70°}$

Resp.: **x = 70°**

SÉRIE IV

Em cada triângulo isósceles (AB = AC), calcular o valor de x:

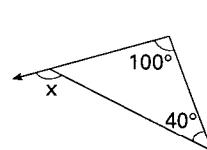
1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter: $\mathbf{\hat{B} = \hat{C} = 2x}$ **e portanto**

$\mathbf{x + 2x + 2x = 180° \therefore 5x = 180° \therefore}$

$\mathbf{x = \dfrac{180°}{5} \therefore}$

$\mathbf{\therefore x = 36°}$

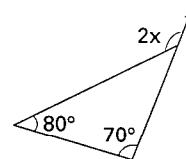
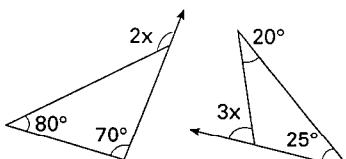
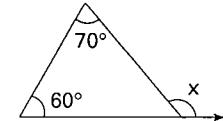
Resp.: **x = 36°**

P.2) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

No triângulo ABC da figura, temos:

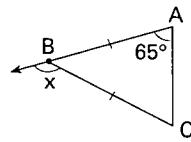
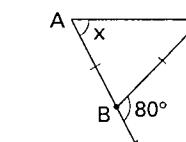
$$\hat{e} = \alpha + \beta$$

SÉRIE V

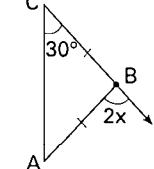
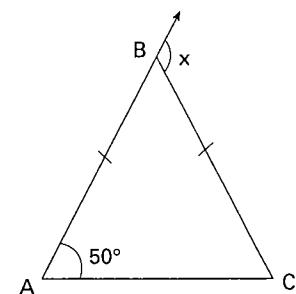
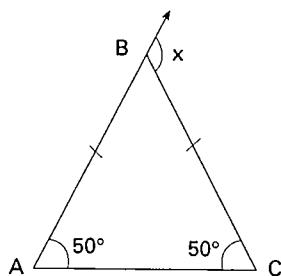
Em cada triângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter:

x = 60° + 70° ∴ x = 130°

Resp.: **x = 130°**

SÉRIE VI

Em cada figura o triângulo ABC é isósceles (AB = BC). Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter:

1) $\hat{A} = \hat{C} = 50°$

2) $x = 50° + 50°$

$\therefore\ x = 100°$

SÉRIE VII

Em cada figura AB = BC, calcular o valor de x:

1)

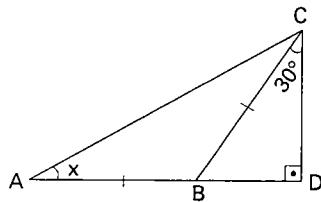
2)

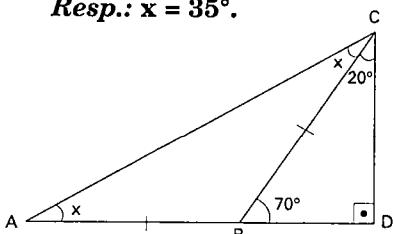
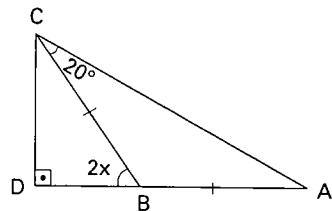
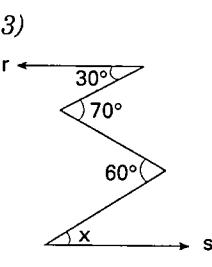
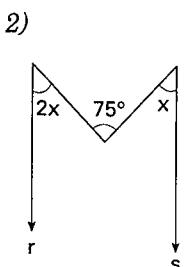
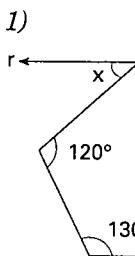
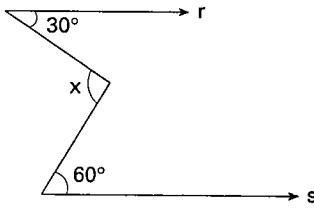
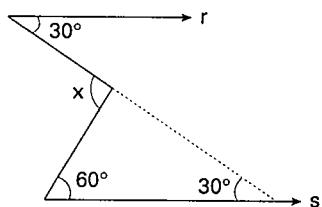
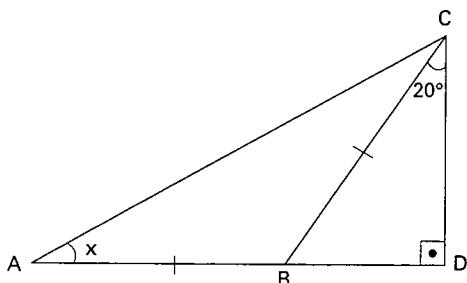
3)

Exemplo:

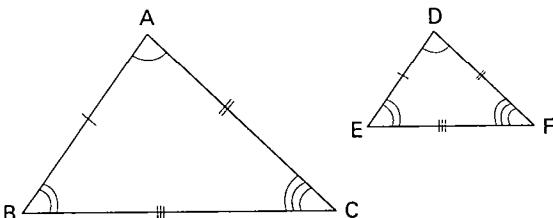
1. **ΔBCD é retângulo, $\hat{B} = 70°$**

2. **ΔABC é isósceles, pois AB = BC, então $\hat{A} = \hat{C} = x$.**

3. **∢ $C\hat{B}D$ é externo no ΔABC, então:**

$x + x = 70°\ \therefore\ 2x = 70°\ \therefore\ x = 35°$

***Resp.:* x = 35°.**

SÉRIE VIII

Em cada figura as retas r e s são paralelas. Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

$x = 60° + 30°\ \therefore\ x = 90°$

14 Semelhança de Triângulos

1. Preliminares

Considere os triângulos ABC e DEF

e sejam as correspondências vértice a vértice a seguir indicadas:

$A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.

Ângulos correspondentes:

$\measuredangle A \leftrightarrow \measuredangle D$, $\measuredangle B \leftrightarrow \measuredangle E$ e $\measuredangle C \leftrightarrow \measuredangle F$.

Lados correspondentes:

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$ e $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$.

2. Definição

Dois triângulos que têm os *ângulos correspondentes* com medidas iguais e os *lados correspondentes* com *medidas proporcionais* são chamados *triângulos semelhantes*.

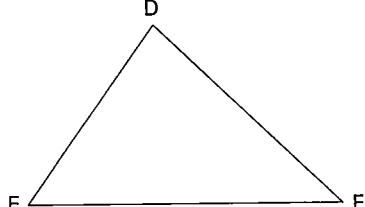
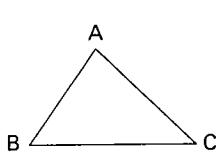
Assim, de acordo com as considerações acima, se

$\hat{A} = \hat{D}$

$\hat{B} = \hat{E}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$, por definição os triângulos

$\hat{C} = \hat{F}$

ABC e DEF são semelhantes.

Indica-se: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Observe que: aos lados correspondentes se opõem os ângulos correspondentes de medidas iguais.

SÉRIE I

Dados: Δ ABC $\sim$ Δ DEF

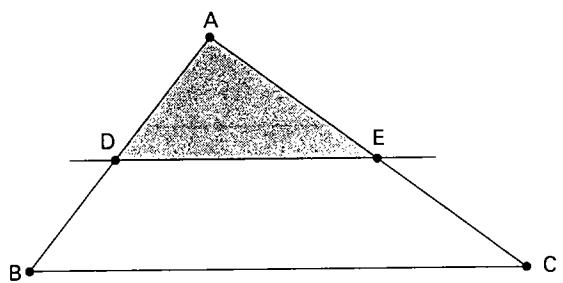
AB, BC, AC e DE.

Calcular: DF e EF.

1) AB = 6 cm, BC = 8 cm, AC = 10 cm e DE = 3 cm.
2) AB = 4 cm, BC = 5 cm, AC = 6 cm e DE = 12 cm.
3) AB = 13 cm, BC = 11 cm, AC = 9 cm e DE = 39 cm.

Exemplo: AB = 5 cm, BC = 7 cm, AC = 9 cm, e DE = 10 cm.

Resolução:

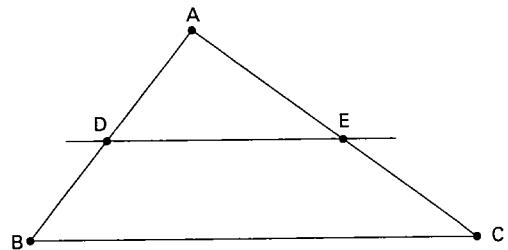
Devemos ter:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \therefore \frac{5}{10} = \frac{7}{EF} = \frac{9}{DF}$$

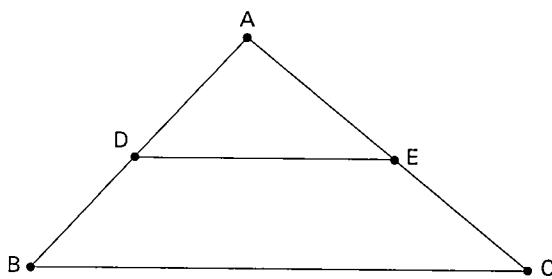
$$\therefore \begin{cases} \dfrac{9}{DF} = \dfrac{1}{2} \therefore DF = 18\,cm \\ \dfrac{7}{EF} = \dfrac{1}{2} \therefore EF = 14\,cm \end{cases}$$

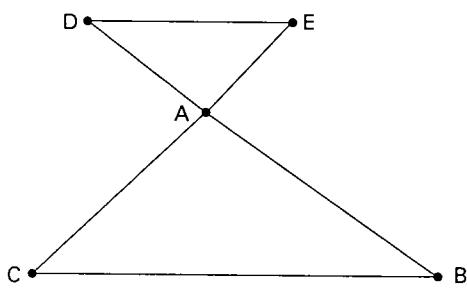
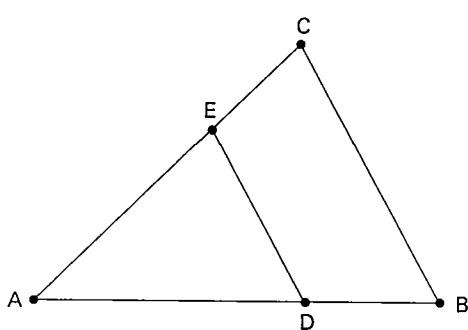
3. Propriedade

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que encontra as retas suportes dos outros dois lados em pontos distintos determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro triângulo.

Na figura, a reta $\overleftrightarrow{DE}$ sendo paralela ao lado $\overline{BC}$ do ΔABC, então o ΔADE é semelhante ao ΔABC.

Em símbolos:

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC.$

SÉRIE II

Dados $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ no ΔABC.

AB, BC, AC e AD.

Calcular: DE e AE.

1) AB = 8 cm, BC = 10 cm
AC = 12 cm e AD = 4 cm

2) AB = 14 cm, BC = 12 cm
AC = 10 cm e AD = 7cm

3) AB = 16 cm, AC = 20 cm
BC = 12 cm e AD = 12 cm

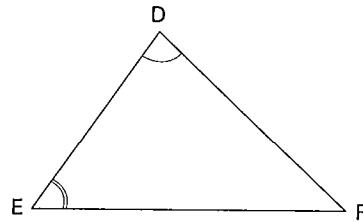
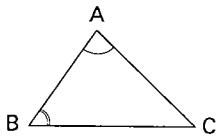
Exemplo: **AB = 18 cm, BC = 15 cm**
AC = 12 cm e AD = 12 cm

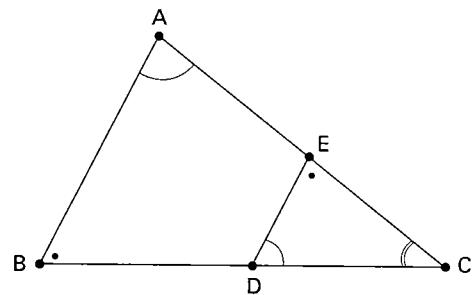
Resolução:

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

$\therefore \frac{12}{18} = \frac{DE}{15} = \frac{AE}{12}$

$\therefore \begin{cases} \frac{DE}{15} = \frac{2}{3} \therefore DE = 10\,cm \\ \frac{AE}{12} = \frac{2}{3} \therefore AE = 8\,cm \end{cases}$

4. Propriedade

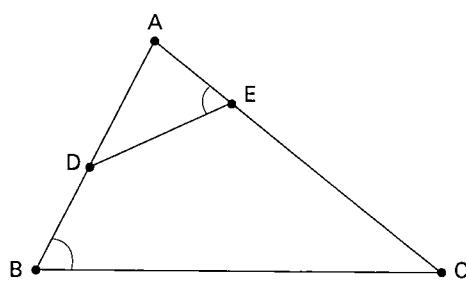
Dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes de medidas iguais são semelhantes.

Na figura, sendo $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Em símbolos:

$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

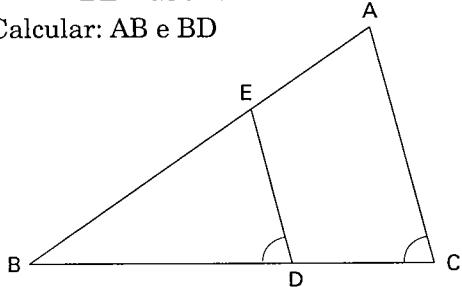
Exemplo: **Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$,**
AB = 8 cm, BC = 10 cm,
AC = 12 cm e DE = 4 cm.
Calcular: CD e EC

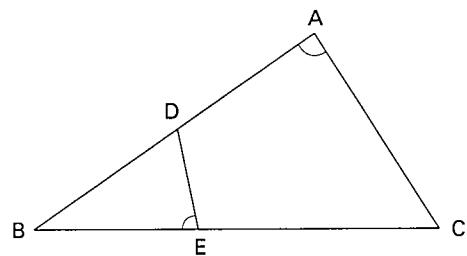
Resolução:

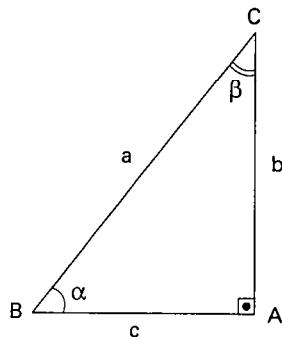
$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D}\ (\text{dado}) \\ \hat{C} = \hat{C}\ (\text{comum}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEC$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC} \quad \therefore \frac{8}{4} = \frac{10}{EC} = \frac{12}{DC}$

$\therefore \begin{cases} \frac{10}{EC} = \frac{2}{1} \therefore EC = 5\,cm \\ \frac{12}{DC} = \frac{2}{1} \therefore DC = 6\,cm \end{cases}$

Exercícios

1) Dados ΔABC, segmento $\overline{DE}$, $\hat{B} = \hat{E}$,
AB = 15 cm, AC = 21 cm,
BC = 18 cm e DE = 6 cm.
Calcular: AD e AE

2) Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$,

$\hat{D} = \hat{C}$, AC = 15 cm
BC = 36 cm, DE = 5 cm
BE = 13 cm.

Calcular: AB e BD

3) Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$,

AB = 24 cm, AC = 10 cm,
BD = 13 cm e BE = 12 cm.

Calcular: BC e DE.

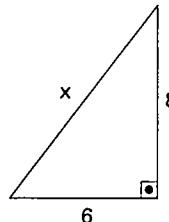
15 Razões Trigonométricas

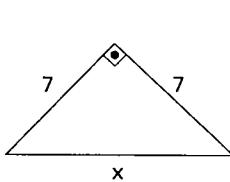
Considere o triângulo ABC, retângulo em A, representado na figura abaixo.

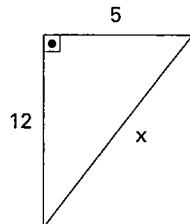
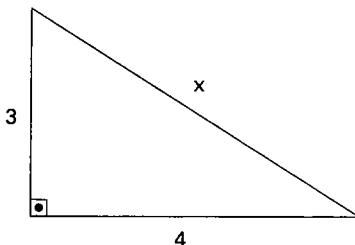
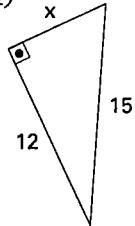
Nomenclatura:

1. a é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$.
2. b é a medida do cateto $\overline{AC}$.
3. c é a medida do cateto $\overline{AB}$.
4. α e β são as medidas dos ângulos agudos de vértices B e C.
5. As medidas α e β são complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90°$.
6. O cateto de medida b está *oposto* ao ângulo de vértice B.
7. O cateto de medida c está *oposto* ao ângulo de vértice C.
8. O cateto de medida b é *adjacente* ao ângulo de vértice C.
9. O cateto de medida c é *adjacente* ao ângulo de vértice B.
10. A hipotenusa de medida a está oposta ao ângulo de vértice A (ângulo reto).

Teorema de Pitágoras

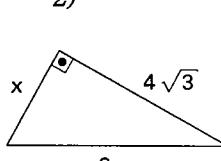
Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

No triângulo ABC, retângulo em A, temos:

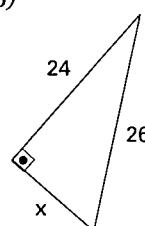
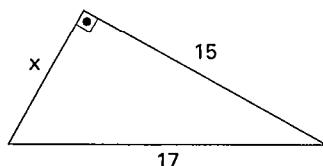
$$a^2 = b^2 + c^2$$

SÉRIE I

Em cada triângulo retângulo calcular a medida x da hipotenusa.

Exemplo:

Resolução:

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \therefore x = \sqrt{25}$

$\therefore \mathbf{x = 5}$

SÉRIE II

Em cada triângulo calcular a medida x do cateto.

Exemplo:

Resolução:

$x^2 + 15^2 = 17^2 \therefore x^2 = 289 - 225 = 64$

$\therefore x = \sqrt{64} \therefore \mathbf{x = 8}$

Definições:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} = \frac{c}{b}$$

SÉRIE III

Em cada triângulo retângulo calcular o seno, o co-seno e a tangente de cada ângulo:

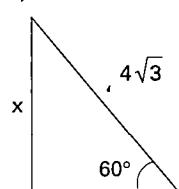
1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução: $\textbf{sen}\ \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$

$\textbf{sen}\ \beta = \frac{3}{5}$ $\quad \cos \beta = \frac{4}{5}$ $\quad \text{tg}\ \beta = \frac{3}{4}$

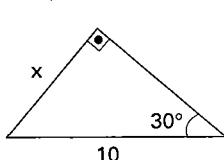
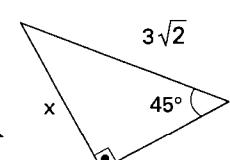
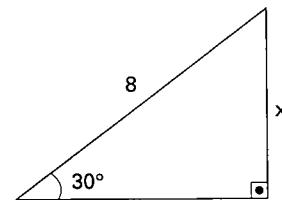
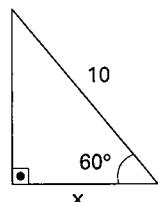
TABELA

$\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg}\ 45° = 1$
$\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$	$\text{sen}\ 90° = 1$ $\cos 90° = 0$ $\text{tg}\ 90° = \nexists$

Observação

tg 90° não existe.

SÉRIE IV

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

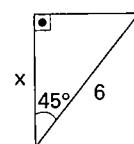
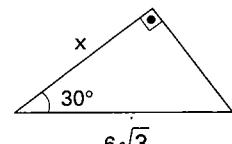
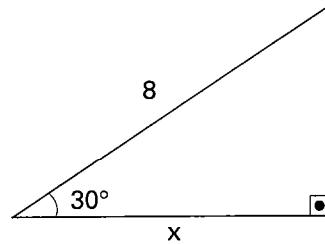
Resolução:

$$\textbf{sen}\ 30° = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \text{sen}\ 30° \therefore$$

$$\therefore x = 8 \cdot \frac{1}{2} \therefore x = 4$$

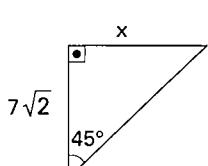
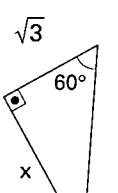
SÉRIE V

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução:

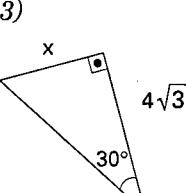
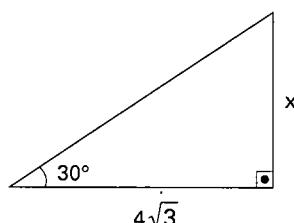
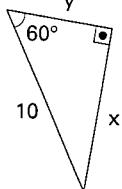
$$\cos 30° = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \cos 30° \therefore$$

$$\therefore x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x = 4\sqrt{3}$$

SÉRIE VI

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1)

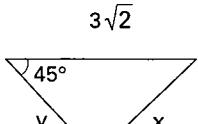
2)

3)

Exemplo:

Resolução:

$\text{tg } 30° = \dfrac{x}{4\sqrt{3}} \therefore x = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{tg } 30°$

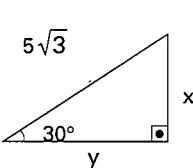
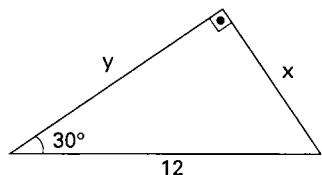
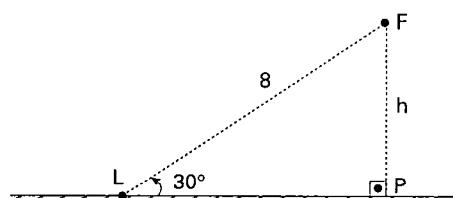
$\therefore x = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore x = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{9}}{3} \therefore$

$\therefore x = \dfrac{4 \cdot 3}{3} \therefore x = 4$

SÉRIE VII

Em cada triângulo retângulo calcular os valores de x e y:

1)

2)

3)

Exemplo:

Resolução:

$\text{sen } 30° = \dfrac{x}{12} \therefore x = 12 \cdot \text{sen } 30° \therefore$

$\therefore x = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \therefore x = 6$

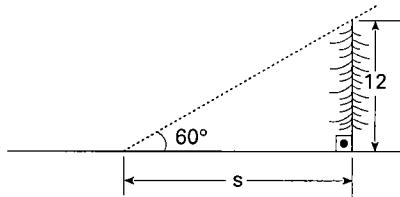
$\cos 30° = \dfrac{y}{12} \therefore y = 12 \cdot \cos 30° \therefore$

$\therefore y = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \therefore y = 6\sqrt{3}$

SÉRIE VIII

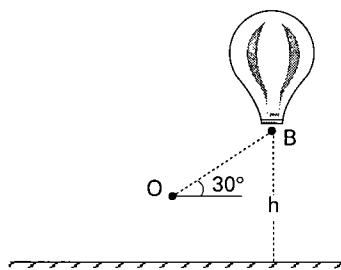
Exemplo: Um foguete é lançado sob um ângulo de 30° em relação ao solo. Qual a sua altura quando percorreu 8km? (Supor a trajetória retilínea)

Resolução:

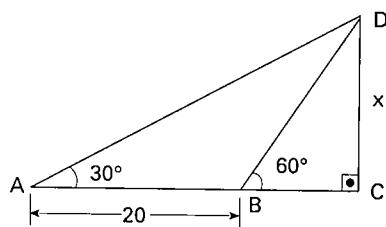
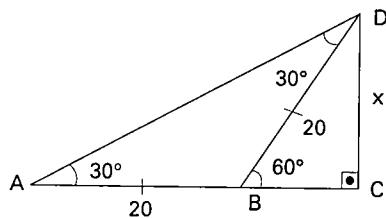
No ΔLPF, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{8} \therefore h = 8 \cdot \text{sen } 30°$

$\therefore h = 8 \cdot \dfrac{1}{2} \therefore$

$\therefore h = 4$

Resp.: 4km

Exercícios

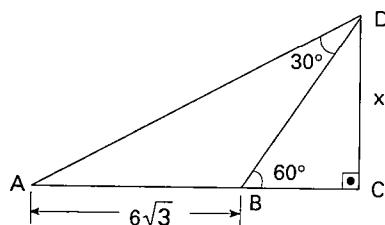
1) Um foguete é lançado sob um ângulo de 45° em relação ao solo. Qual a sua distância ao ponto de lançamento quando atingir a altura de 4km? (Supor a trajetória retilínea)

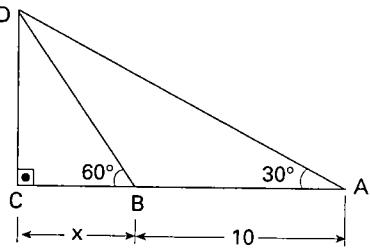
2) A figura abaixo representa uma árvore de altura 12 metros. Calcular a sua sombra s quando um raio luminoso forma com o solo um ângulo de 60°.

3) Um observador O de altura 1,75m vê um balão B sob ângulo de 30° em relação ao solo. No instante em que a distância do observador ao balão é de 146,50m, calcular a altura h do balão em relação ao solo.

SÉRIE IX

Exemplo:

Resolução:

1. **No Δ ABD o ângulo CBD é externo, então $\hat{D} + 30° = 60°$ $\therefore$ $\hat{D} = 30$ e o Δ ABD é isósceles e portanto BD = AB = 20.**

2. **No Δ BCD, temos: $\text{sen } 60° = \frac{x}{20}$ $\therefore$**

$\therefore$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$ $\therefore$ $x = 10\sqrt{3}$

Resp.: $x = 10\sqrt{3}$

Exercícios

Em cada figura colocar o valor de x:

1)

2)

16 Equação do 2º Grau

1. **Equação do 2º grau**, na incógnita x, é toda equação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

onde *a*, *b* e *c* são números reais.

Exemplos:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$; $a = 1$, $b = -4$ e $c = -5$

b) $2x^2 + 3x = 0$; $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$; $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$

2. **Fórmula resolutiva de Báskara**

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada discriminante da equação do 2º grau. Indica-se pela letra grega maiúscula Δ (lê-se: delta).

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo $\Delta \geqslant 0$ (Δ positivo ou Δ nulo), podemos escrever

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Indicamos por x_1 e x_2 as duas raízes reais, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SÉRIE I

Exemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$

1º passo: **Cálculo de Δ**

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

2º passo: **Aplicação da fórmula de Báskara**

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2} \ \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

S = {2, 3}

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$

2) $x^2 - x - 6 = 0$

3) $x^2 + 3x - 4 = 0$

4) $x^2 + 5x + 6 = 0$

SÉRIE II

Resolver em IR

1) $x^2 - 2x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$

3) $x^2 - 9 = 0$

4) $4x^2 - 25 = 0$

SÉRIE III

Exemplo: $x^2 - 8x + 16 = 0$

Cálculo de Δ:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 16 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

S = {4}

> **➡ Nota**
>
> Sendo Δ = 0, diz-se que a equação do 2º grau tem *raiz dupla*, ou seja, $x_1 = x_2$.

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

2) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

4) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

SÉRIE IV

Exemplo: $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = (-4)^2 - 4(3)(2) = 16 - 24 = -8$$

Sendo $\Delta < 0$ (Δ negativo), a equação do 2º grau não admite raízes reais.

O conjunto solução S é o *conjunto vazio*, ou seja, $S = \varnothing$.

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 3x + 5 = 0$

2) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

3) $x^2 - 2x + 3 = 0$

4) $x^2 + x + 1 = 0$

SÉRIE V

Resolver em IR

1) $x \cdot (x + 2) = (x - 3) \cdot 2x$

2) $\frac{x^2 + 1}{5} - \frac{2x^2 - 5}{13} = 1$

3) $\frac{3x^2 - 5}{8} = \frac{2x + 1}{4}$

4) $\frac{x - 2}{3x} + \frac{2x - 1}{2} = \frac{5x + 2}{6}$

17 Trinômio do 2º Grau

Chama-se **trinômio do 2º grau** na variável real x à toda expressão reduzível a forma

$$ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0,$$

onde os coeficientes a, b e c são números reais.

Assim, $x^2 - 6x + 5$ é um trinômio do 2º grau, onde $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$.

Considere a equação do 2º grau $y = x^2 - 6x + 5$, nas variáveis reais x e y, observe que a todo valor real de x corresponde um *único* valor numérico de y.

Assim, por exemplo, para $x = 2$, temos:

$$y = (2)^2 - 6(2) + 5 = 4 - 12 + 5 \therefore y = -3.$$

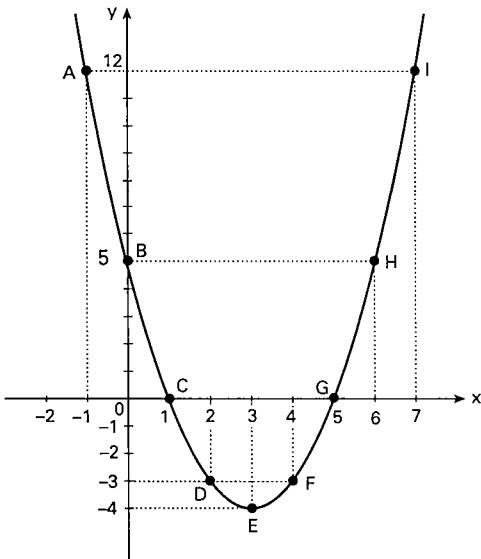
Portanto, uma equação do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, nas variáveis x e y, define uma função (pois a todo x real corresponde um único y real).

A função real definida pela equação do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, chama-se *função trinômio do 2º grau.*

Indicando-se essa função por f e o valor real y por f(x) (lê-se: f de x), temos $y = f(x)$ e escrevemos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0.$$

Nota

f(x) é a imagem (ordenada) de x por f.

Assim, dada a função $y = x^2 - 6x + 5$, temos:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

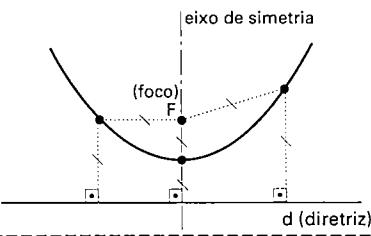
O valor de y para $x = 2$ é tal que:

$$y = f(2) = (2)^2 - 6(2) + 5 \therefore y = -3.$$

SÉRIE I

Exemplo: $y = x^2 - 6x + 5$

Representação: Prova-se que o gráfico de uma *função trinômio do 2º grau* é uma *parábola**.

Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais representamos os pontos (x, y) que têm x por abscissa e y por ordenada.

Atribuindo-se a x valores como os indicados na tabela, obtemos os correspondentes valores de $y = f(x)$.

Assim, para $x = -1$, temos:

$$f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 5$$
$$= 1 + 6 + 5$$
$$= 12$$

x	y	pontos
⋮	⋮	⋮
−1	12	A(−1, 12)
0	5	B(0, 5)
1	0	C(1, 0)
2	−3	D(2, −3)
3	−4	E(3, −4)
4	−3	F(4, −3)
5	0	G(5, 0)
6	5	H(6, 5)
7	12	I(7, 12)
⋮	⋮	⋮

Nota

• Parábola é uma curva de um plano constituída pelo conjunto dos pontos eqüidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz), à que não pertencem, situados nesse plano:

A figura que se obtém unindo-se convenientemente os pontos A, B, C... é o esboço do gráfico da função dada, que é uma *parábola* com sua *concavidade* voltada para *cima*.

Dada uma função trinômio do 2º grau:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

- se $a > 0$, então a parábola do gráfico tem a *concavidade* voltada para *cima*.
- se $a < 0$, então a parábola do gráfico tem a *concavidade* voltada para *baixo*.

Exercícios

Representar no plano cartesiano ortogonal o gráfico da função real $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

1) $y = x^2 - 6x + 8$

2) $y = -2x^2 + 4x - 3$

3) $y = x^2 - 6x + 9$

4) $y = x^2 - 3x$

5) $y = -x^2 + 4$

6) $y = 2x^2$

SÉRIE II

Raízes ou zeros reais do trinômio do 2º grau.

Dado o trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, chamam-se *raízes* ou *zeros* do trinômio, quando existem, os valores reais de x que o anulam.

As raízes ou zeros são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo: $\mathbf{x^2 - 6x + 5}$

Resolução:

Devemos ter $x^2 - 6x + 5 = 0$ ↗ $x = 1$ ou ↘ $x = 5$

Resp.: 1 ou 5

Exercícios

Dar as raízes ou zeros reais de cada trinômio do 2º grau.

1) $x^2 - 5x + 6$

2) $x^2 + x - 6$

3) $-x^2 + 4x - 4$

4) $-2x^2 + 6$

SÉRIE III

Vértice da parábola

O vértice da parábola do gráfico da função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto V tal que:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemplo: $\mathbf{y = x^2 - 6x + 5}$

Resolução:

Devemos ter:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(5)}{4(1)} =$$

$$= -\frac{36 - 20}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

Um outro modo de calcular y_V.

$y_V = f(x_V) = f(3) = (3)^2 - 6(3) + 5 =$
$= 9 - 18 + 5 = -4$

Resp.: V(3, –4)

Exercícios

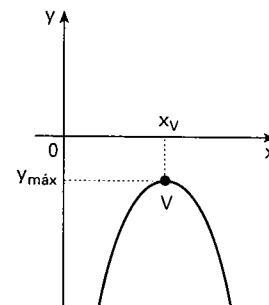
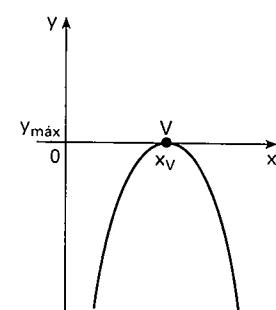
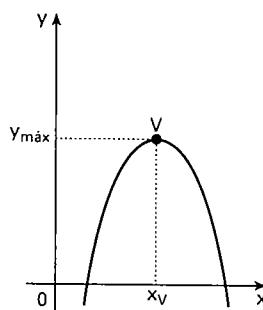
Obter o vértice V de cada parábola do gráfico da função trinômio do 2º grau.

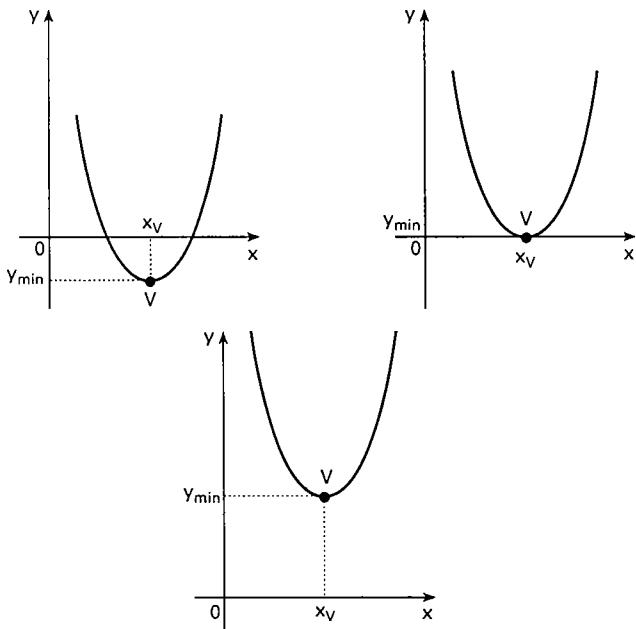
1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

2) $y = 3x^2 + 6x + 5$

3) $y = x^2 + 6x - 2$

4) $y = -x^2 + 8x$

SÉRIE IV

Máximo ou mínimo do trinômio do 2º grau.

Para o valor $-\frac{b}{2a}$ da variável x, o trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$ assume:

- valor *máximo*, se $a < 0$ ou
- valor *mínimo*, se $a > 0$.

Seja a função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$.

$a < 0$

$a > 0$

Exemplo: $x^2 - 4x + 7$

Resolução:

Como a = 1 (a > 0), então para

$x_V = -\frac{-4}{2(1)} = 2$, temos o valor mínimo do trinômio. Este valor mínimo é:

$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 7$
$= 4 - 8 + 7$
$= 3$

Resp.: 3

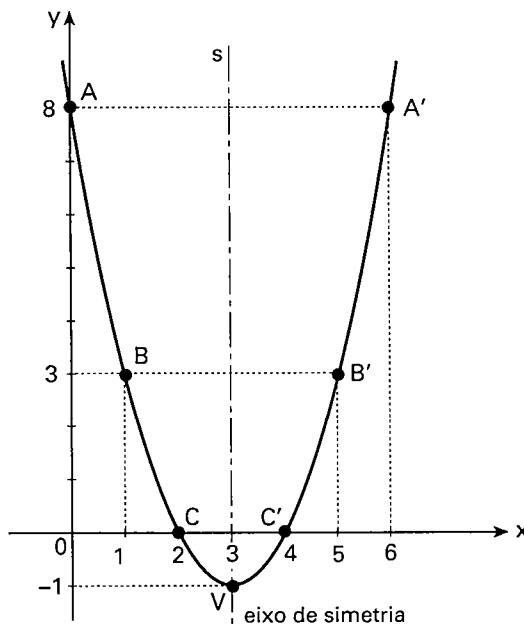
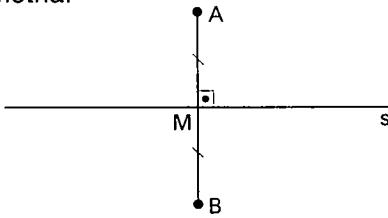
Exercícios

Calcular o valor máximo ou valor mínimo dos seguintes trinômios:

1) $x^2 - 6x + 5$
2) $-x^2 + 6x - 5$
3) $2x^2 - 6x + 7$
4) $-3x^2 + 8x - 6$

SÉRIE V

Eixo de simetria

Eixo de simetria* de uma parábola, gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, é a reta s perpendicular ao eixo das abscissas passando pelo vértice V.

Se um ponto A pertence à parábola, então o ponto A' simétrico de A em relação à reta s (eixo de simetria) também pertence a essa parábola.

Uma equação do eixo de simetria da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ é $x = -\frac{b}{2a}$, onde $-\frac{b}{2a}$ é a abscissa do vértice dessa *parábola*.

A figura representa o gráfico de uma parábola de equação dada.

Exemplo: $y = x^2 - 6x + 8$

x	y	pontos
⋮	⋮	⋮
0	8	A(0, 8)
1	3	B(1, 3)
2	0	C(2, 0)
3	−1	V(3, −1)
4	0	C'(simétrico de C)
5	3	B'(simétrico de B)
6	8	A'(simétrico de A)
⋮	⋮	⋮

➥ Nota

• Dois pontos A e B são chamados simétricos em relação a uma reta s (eixo de simetria) se, e somente se, a reta s é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Na figura, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e s é o eixo de simetria.

O eixo de simetria s é a reta de equação x = 3.

Exercícios

Dar uma equação do eixo de simetria das seguintes parábolas:

1) $y = x^2 + 6x - 4$
2) $y = 3x^2 - 12x$
3) $y = -x^2 + 6x - 8$
4) $y = 2x^2 + 8$

SÉRIE VI

Exemplo: A(1, 2), B(–1, 12) e C(5, 6)

Resolução:

Como a parábola passa pelo ponto A(1, 2), a equação $y = ax^2 + bx + c$ deve ser verificada para x = 1 e y = 2, e temos:

$2 = a(1)^2 + b(1) + c \therefore a + b + c = 2$ (1).

Procedendo do mesmo modo com o ponto B:

$12 = a(-1)^2 + b(-1) + c \therefore$
$\therefore a - b + c = 12$ (2).

Por fim, com o ponto C, temos:

$6 = a(5)^2 + b(5) + c \therefore$
$25a + 5b + c = 6$ (3).

Das equações (1), (2) e (3) resulta o sistema de três equações nas incógnitas a, b e c.

$$\begin{cases} a + b + c = 2 & (1) \\ a - b + c = 12 & (2) \\ 25a + 5b + c = 6 & (3) \end{cases}$$

Este sistema poderá ser resolvido, por exemplo, por substituição, tirando o valor de c de uma das equações e substituindo este valor nas outras duas, obtendo um sistema a duas incógnitas.

Entretanto, vamos resolvê-lo pelo método da adição, considerando dois sistemas I e II; o sistema I constituído pelas equações (1) e (2), e o sistema II, por (1) e (3), temos:

$$\text{I} \begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \cancel{b} + c = 2 \\ a - \cancel{b} + c = 12 \end{cases}$$

$2a + 2c = 14 \quad \therefore \quad a + c = 7$ (4)

$$\text{II} \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5a - \cancel{5b} - 5c = -10 \\ 25a + \cancel{5b} + c = 6 \end{cases}$$

$20a - 4c = -4 \quad \therefore \quad 5a - c = -1$ (5)

Das equações (4) e (5), temos o sistema:

$$\begin{cases} a + c = 7 \\ 5a - c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \cancel{c} = 7 \\ 5a - \cancel{c} = -1 \end{cases}$$

$6a = 6 \quad \therefore \quad a = 1$

Substituindo-se a = 1, por exemplo, na equação a + c = 7, vem: $1 + c = 7 \therefore c = 6$.

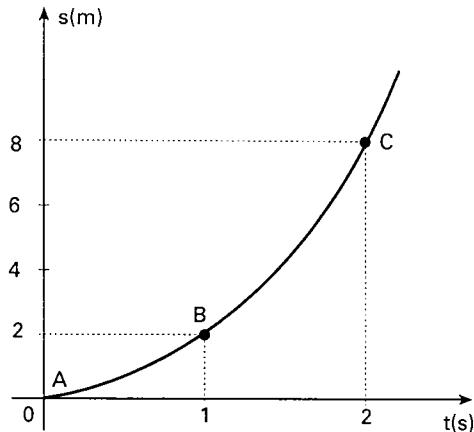
Substituindo-se a = 1 e c = 6, por exemplo, na equação a + b + c = 2, resulta: $1 + b + 6 = 2 \therefore b = -5$.

Portanto, a equação procurada é $y = x^2 - 5x + 6$.

Resp.: $x^2 - 5x + 6$

Exercícios

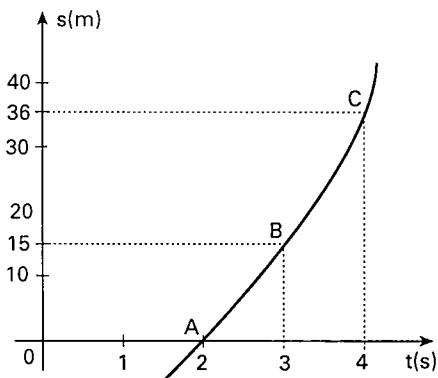
Determinar a equação $y = ax^2 + bx + c$ da parábola que passa pelos três pontos A, B e C dados:

1) A(1, –4), B(3, 6) e C(–1, –6)
2) A(1, –1), B(3, –9) e C(2, –3)
3) A(2, –2), B(–1, 4) e C(3, 0)
4) A(–1, –3), B(2, 3) e C(0, –5)

SÉRIE VII

Exemplo: Um carro movimenta-se sobre uma estrada, obedecendo à equação horária $s = 2t^2$, onde s é medido em metros e t em segundos. Estabelecer o diagrama horário desse movimento.

Resolução:

Como s é uma função trinômio do 2º grau na variável t, o diagrama ou gráfico desse movimento é um arco de parábola para $t \geq 0$.

t	s	pontos
0	0	A(0, 0)
1	2	B(1, 2)
2	8	C(2, 8)

Exercícios

1) Uma bala de canhão é lançada verticalmente e obedece à equação horária $s = 50t - 5t^2$ (s em metros e t em segundos). Estabelecer o diagrama horário do movimento realizado pela bala.

2) Um carro movimenta-se sobre uma estrada, de acordo com a equação horária $s = 4 - 2t + t^2$ (s em metros e t em segundos). Estabelecer o correspondente gráfico horário.

SÉRIE VIII

Exemplo: Estabelecer a equação horária s = f(t) cujo diagrama horário representado na figura é um arco de parábola.

Resolução

Seja $s = a + bt + ct^2$ a equação horária procurada.

Ponto A: $0 = a + b(2) + c(2)^2 \therefore$

$\therefore a + 2b + 4c = 0$ (1)

Ponto B: $15 = a + b(3) + c(3)^2 \therefore$

$\therefore a + 3b + 9c = 15$ (2)

Ponto C: $36 = a + b(4) + c(4)^2 \therefore$

$\therefore a + 4b + 16c = 36$ (3)

Das equações (1) e (2) temos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ a + 3b + 9c = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - 2b - 4c = 0 \\ a + 3b + 9c = 15 \end{cases}$$

$$b + 5c = 15 \quad (4)$$

Das equações (1) e (3) temos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ a + 4b + 16c = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - 2b - 4c = 0 \\ a + 4b + 16c = 36 \end{cases}$$

$$2b + 12c = 36$$

$$\therefore b + 6c = 18 \quad (5)$$

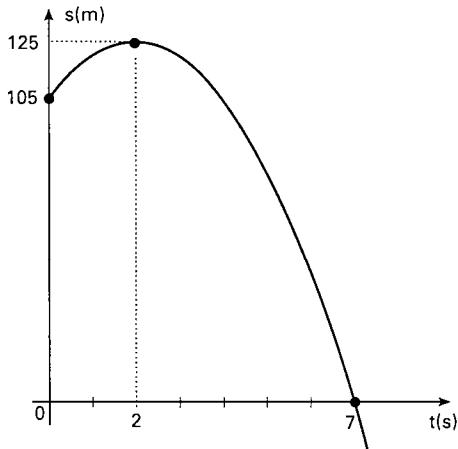
Das equações (4) e (5) temos o sistema:

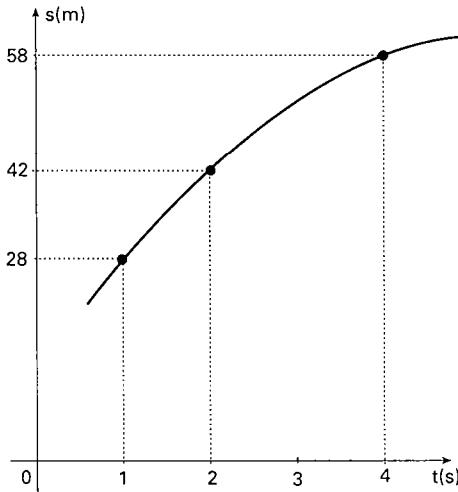
$$\begin{cases} b + 5c = 15 \\ b + 6c = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - 5c = -15 \\ b + 6c = 18 \end{cases}$$

$$c = 3$$

Substituindo-se c = 3 na equação (4), vem:

$$b + 5 \cdot 3 = 15 \quad \therefore \quad b = 0$$

Substituindo-se b = 0 e c = 3 na equação (1), resulta:

$$a + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 0 \quad \therefore \quad a = -12$$

Portanto, a equação horária procurada é $s = -12 + 3t^2$.

Resp.: $s = -12 + 3t^2$.

Exercícios

1) Estabelecer a equação horária s = f(t) cujo gráfico horário representado na figura é um arco de parábola.

2) Um corpo movimenta-se obedecendo a uma equação horária trinômio do 2º grau cujo diagrama horário é indicado na figura.
Estabelecer a equação que rege esse movimento.

Respostas

1. NÚMEROS

SÉRIE I	SÉRIE II	SÉRIE III	SÉRIE IV
1. 44	1. 1	1. 45	1. 61
2. 19	2. 28	2. 1	2. 2
3. 9	3. 19	3. 10	3. 26
4. 23	4. 32	4. 39	4. 2

SÉRIE V	SÉRIE VI	SÉRIE VII	SÉRIE VIII
1. +10	1. –6	1. +6	1. +5
2. +6	2. –12	2. +15	2. +6
3. +21	3. –28	3. +35	3. +3
4. +36	4. –5	4. +8	4. +6

SÉRIE IX	SÉRIE X	SÉRIE XI	SÉRIE XII
1. –5	1. +2	1. +8	1. 8 5. 128
2. –3	2. +13	2. –10	2. 9 6. 100
3. –2	3. +2	3. –9	3. 16 7. 1
4. –3	4. +7	4. +3	4. 49 8. 1000

SÉRIE XIII	SÉRIE XIV	SÉRIE XV	SÉRIE XVI
1. +9	1. –32	1. 100	1. 10^6
2. +25	2. –27	2. 1000	2. 10^7
3. +81	3. –125	3. 100000	3. 10^8
4. +1	4. –1	4. 1000000	4. 10^9

SÉRIE XVII	SÉRIE XVIII			SÉRIE XIX
1. –9	1. 2	5. 7	9. 12	1. 3
2. –8	2. 3	6. 9	10. 13	2. 4
3. –1	3. 4	7. 10	11. 14	3. 5
4. –1	4. 6	8. 11	12. 15	4. 10

SÉRIE XX	SÉRIE XXI	SÉRIE XXII
1. 437	1. 212,7	1. 49,58
2. 156	2. 249,8	2. 60,34
3 482	3. 130,2	3. 125,26
4. 203	4. 200,6	4. 108,04

2. Números Fracionários

SÉRIE I	SÉRIE II	SÉRIE III	SÉRIE IV
1. $\frac{1}{3}$	1. $6\frac{1}{5}$	1. $\frac{23}{6}$	1. $1\frac{4}{13}$
2. $\frac{3}{4}$	2. $3\frac{3}{7}$	2. $\frac{11}{7}$	2. $1\frac{8}{11}$
3. $\frac{4}{5}$	3. $4\frac{3}{5}$	3. $\frac{7}{3}$	3. $2\frac{3}{5}$
4. $\frac{4}{7}$	4. $4\frac{5}{9}$	4. $\frac{15}{2}$	4. $4\frac{1}{5}$

SÉRIE V	SÉRIE VI	SÉRIE VII	SÉRIE VIII
1. $\frac{2}{5}$	1. $\frac{11}{13}$	1. $\frac{11}{15}$	1. $3\frac{6}{7}$
2. 1	2. 2	2. $4\frac{1}{6}$	2. $\frac{14}{15}$
3. $2\frac{1}{3}$	3. $2\frac{6}{7}$	3. $2\frac{1}{4}$	3. $\frac{9}{10}$
4. $1\frac{2}{7}$	4. $2\frac{1}{2}$	4. $1\frac{3}{7}$	4. $\frac{22}{35}$

SÉRIE IX	SÉRIE X	SÉRIE XI	SÉRIE XII
1. $2\frac{14}{15}$	1. $\frac{3}{8}$	1. $\frac{8}{9}$	1. 10
2. $3\frac{1}{3}$	2. $\frac{27}{28}$	2. $\frac{2}{3}$	2. 2
3. $3\frac{7}{12}$	3. $1\frac{2}{5}$	3. $1\frac{1}{8}$	3. $\frac{3}{10}$
4. $2\frac{2}{3}$	4. $\frac{4}{7}$	4. 2	4. $\frac{2}{7}$

SÉRIE XIII	SÉRIE XIV	SÉRIE XV	SÉRIE XVI
1. $\frac{1}{6}$	1. $\frac{31}{45}$	1. $\frac{16}{25}$	1. $+\frac{1}{16}$
2. 2	2. 3	2. $\frac{9}{49}$	2. $-\frac{8}{27}$
3. $2\frac{1}{2}$	3. $\frac{19}{30}$	3. $\frac{1}{125}$	3. $+\frac{1}{81}$
4. $\frac{2}{5}$	4. $1\frac{1}{5}$	4. $\frac{16}{81}$	4. $-\frac{64}{125}$

SÉRIE XVII	SÉRIE XVIII	SÉRIE XIX	SÉRIE XX
1. $\frac{1}{8}$	1. $\frac{4}{9}$	1. $\frac{3}{4}$	1. $2\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{1}{25}$	2. $1\frac{9}{16}$	2. $\frac{1}{5}$	2. $2\sqrt{5}$
3. $\frac{1}{27}$	3. $3\frac{3}{8}$	3. $\frac{9}{10}$	3. $4\sqrt{2}$
4. $\frac{1}{100}$	4. 25	4. $\frac{7}{10}$	4. $3\frac{\sqrt{7}}{7}$

3. Frações e Números Decimais

SÉRIE I

1. 0,07
2. 0,013
3. 0,17
4. 3,1

SÉRIE II

1. $\frac{3}{1000}$
2. $\frac{20017}{10000}$
3. $\frac{101}{10000}$
4. $\frac{217}{100}$

SÉRIE III

1. $\frac{175}{100}$
2. $\frac{52}{100}$
3. $\frac{568}{1000}$
4. $\frac{5}{100}$

SÉRIE IV

1. $\frac{5}{9}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{2}{9}$
4. $\frac{2}{3}$

SÉRIE V

1. $\frac{14}{9}$
2. $\frac{7}{3}$
3. $\frac{29}{9}$
4. $\frac{5}{3}$

SÉRIE VI

1. $\frac{38}{99}$
2. $1\frac{23}{99}$
3. $\frac{182}{999}$
4. $2\frac{35}{333}$

SÉRIE VII

1. 0,01
2. 0,0001
3. 0,00001
4. 0,000001

SÉRIE VIII

1. 10^{-6}
2. 10^{-7}
3. 10^{-8}
4. 10^{-9}

SÉRIE IX

1. 25,3302
2. 7,54159
3. 17,741
4. 73,9728

SÉRIE X

1. 11,53618
2. 0,705109
3. 0,0005549
4. 0,01703205

SÉRIE XI

1. 0,49
2. 0,000169
3. 0,0016
4. 0,000009

SÉRIE XII

1. 1,53
2. 1,25
3. 31,2
4. 1,25

SÉRIE XIII

1. 0,25
2. 3,28
3. 0,016
4. 0,045

SÉRIE XIV

1. 0,17
2. 9,13
3. 2,47
4. 0,27

SÉRIE XV

1. 0,171
2. 9,137
3. 2,473
4. 0,270

SÉRIE XVI

1. 0,12
2. 1,4
3. 0,5
4. 0,011

SÉRIE XVII

1. 0,94
2. 0,18
3. 0,15
4. 0,37

4. Sistema Métrico Decimal

1. Unidades de comprimento

SÉRIE I

1. 375,2m
2. 4 750m
3. 60,7m
4. 4 038,5m

SÉRIE II

1. 0,46378m
2. 0,0038m
3. 3,945m
4. 0,0005m

SÉRIE III

1. 0,341
2. 0,06072
3. 0,01783
4. 0,472

SÉRIE IV

1. 81,4
2. 1 642,75
3. 7 278
4. 72

SÉRIE V

1. 0,3727m
2. 1,371m
3. 0,12052m

SÉRIE VI

1. 78m
2. 1 347,22m
3. 1 117,77m
4. 11 800m

SÉRIE VII

1. 49 500cm
2. 106 127cm
3. 367,95cm
4. 41,0069cm

2. Unidades de área

SÉRIE I

1. 48 000m^2
2. 1 307m^2
3. 31 020m^2
4. 42 308120m^2

SÉRIE II

1. 0,7301m^2
2. 1,0964m^2
3. 0,674375m^2
4. 0,000001m^2

SÉRIE III

1. 812 750
2. 37,619
3. 3 010 000
4. 750

3. Unidades de volume

SÉRIE I

1. 5 764 331 480m^3
2. 0,0164385m^3
3. 1,3m^3
4. 2,735148901m^3

SÉRIE II

1. 0,003810075
2. 2 781 130 500
3. 13 740 075 000
4. 680 100

4. Unidades de capacidade

SÉRIE I

1. 7,5L
2. 6,72L
3. 0,25L
4. 0,0725L

SÉRIE II

1. 7,25
2. 478,75
3. 750
4. 97,5

SÉRIE III

1. 475L
2. 0,047L
3. 25L
4. 14106000L

SÉRIE IV

1. 4 200dm^3
2. 10050dm^3
3. 67,51dm^3
4. 0,48dm^3

5. Unidades de massa

SÉRIE I

1. 372g
2. 4,78g
3. 0,7325g
4. 15g

SÉRIE II

1. 2,7685t
2. 54,5t
3. 7,8545t
4. 10t

SÉRIE III

1. 8,745kg
2. 23,786kg
3. 720kg
4. 100kg

SÉRIE IV

1. 15 quilates
2. 22,5 quilates
3. 128 quilates
4. 7,4 quilates

SÉRIE V

1. 149,08g
2. 675 quilates
3. 9t
4. 15 bolas

6. Unidades de tempo

SÉRIE I

1. 199 277s
2. 142 367s
3. 66 572s
4. 34 825s

SÉRIE II

1. $\frac{73}{36}$h
2. $\frac{31}{18}$h
3. $\frac{13}{9}$h
4. $\frac{2}{9}$h

SÉRIE III

1. 4d 7h 33min 50s
2. 1d 15h 25min 10s
3. 20h 47min 5s
4. 3d 11h 15min

SÉRIE IV

1. 3h 13min 20s
2. 1h 18min 20s
3. 1h 31min
4. 53min 7s

5. Equações do 1º grau

SÉRIE I

1. $\{5\}$
2. $\{-2\}$
3. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$
4. $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$

SÉRIE II

1. $\{-3\}$
2. $\{2\}$
3. $\left\{-\frac{7}{3}\right\}$
4. $\{3\}$

SÉRIE III

1. $\{3\}$
2. $\{-3\}$
3. $\left\{\frac{9}{2}\right\}$
4. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

SÉRIE IV

1. $\{2\}$
2. $\{-4\}$
3. $\{2\}$
4. $\left\{\frac{10}{3}\right\}$

SÉRIE V

1. $\left\{\frac{11}{3}\right\}$
2. $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$
3. $\left\{\frac{5}{2}\right\}$
4. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

SÉRIE VI

1. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$
2. $\{-2\}$
3. $\left\{-\frac{7}{4}\right\}$
4. $\left\{\frac{3}{8}\right\}$

SÉRIE VII

1. $\{-2\}$
2. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
3. $\{1\}$
4. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

SÉRIE VIII

1. $\{4\}$
2. $\left\{\frac{1}{8}\right\}$
3. $\{1\}$
4. $\left\{\frac{7}{3}\right\}$

SÉRIE IX

1. $\{6, 8\}$
2. $\{2, 8\}$
3. $\{0, 3\}$
4. $\{1, 6\}$

SÉRIE X

1. $\{0\}$
2. $\{0\}$

SÉRIE XI

1. $\varnothing$
2. $\varnothing$

SÉRIE XII

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$

SÉRIE XIII

1. 43 e 44
2. 19, 20 e 21
3. 17 e 34
4. 13, 39 e 78

SÉRIE XIV

1. 21 e 37
2. Pedro: R$ 1 825,00
   Antônio: R$ 2 700,00
3. 90 e 30
4. 12

SÉRIE XV

1. $\{6\}$
2. $\{4\}$
3. $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$
4. $\{2\}$

SÉRIE XVI

1. $\{-2\}$
2. $\left\{\frac{8}{3}\right\}$
3. $\{8\}$
4. $\{1\}$

6. Inequações do 1º grau

SÉRIE I

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$

SÉRIE II

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3}\right\}$

SÉRIE III

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$

SÉRIE IV

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

SÉRIE V

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{13}{5}\right\}$

SÉRIE VI

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{8}\right\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{7}{3}\right\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4{,}6\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2{,}54\}$

7. Razão e Proporção

SÉRIE I

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{2}{3}$

SÉRIE II

1. $\frac{5}{18}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{5}{4}$
4. $\frac{10}{3}$

SÉRIE III

1. $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$; $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$; $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$; $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$; $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$; $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$; $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$
2. $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$; $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$; $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$
3. $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$; $\frac{x}{b} = \frac{a}{y}$; $\frac{y}{a} = \frac{b}{x}$; $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$; $\frac{b}{y} = \frac{x}{a}$; $\frac{a}{y} = \frac{x}{b}$; $\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$; $\frac{y}{b} = \frac{a}{x}$

SÉRIE IV

1. $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ ou $\frac{8}{4} = \frac{16}{8}$
2. $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{1}$ ou $\frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

SÉRIE V

1. 2
2. 3
3. 7

SÉRIE VI

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{4}{9}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{18}{5}$

SÉRIE VII

1. ± 6
2. ± 8
3. ± 6
4. $\pm\sqrt{5}$

SÉRIE VIII

1. $\frac{12}{7}$
2. 12
3. 24
4. 60

SÉRIE IX

1. 4 e 12
2. 14 anos e 21 anos
3. 12 cm e 20 cm
4. $24\,cm^2$ e $42\,cm^2$

SÉRIE X

1. 8 e 20
2. 16 anos e 36 anos
3. 40° e 100°
4. $18\,cm^3$ e $27\,cm^3$

SÉRIE XI

1. 18, 30 e 42
2. 12 cm, 16 cm e 20 cm
3. 30°, 70° e 80°
4. 80°, 120° e 160°

8. Regra de Três

SÉRIE I

1. R$ 9 450,00
2. R$ 13 200,00
3. 900
4. 390 m

SÉRIE II

1. 2h
2. 210 voltas
3. 16
4. 5

9. Porcentagem

SÉRIE I

1. 75%
2. 70%
3. 12%
4. 125%

SÉRIE II

1. 0,45
2. 0,07
3. 0,5
4. 1,3

SÉRIE III

1. 260
2. 1,5
3. 102
4. 15,7

SÉRIE IV

1. 6%
2. 12%
3. 9%
4. 10%

SÉRIE V

1. 4%
2. 0,25%
3. 0,1%
4. 0,8%

SÉRIE VI

1. R$ 925,00
2. R$ 9 000,00
3. R$ 1 800,00
4. R$ 20 250,00

SÉRIE VII

1. R$ 8 400,00
2. R$ 3 190,00

SÉRIE VIII

1. R$ 5 966,40
2. R$ 130 500,00

SÉRIE IX

1. 15%
2. 25%

SÉRIE X

1. 17%
2. 18%

SÉRIE XI

1. 12%
2. 40%
3. 57,5%
4. 28%

SÉRIE XII

1. 40% de cálcio, 12% de carbono e 48% de oxigênio.
2. 40% de carbono, 6 2/3% de hidrogênio e 53 1/3% de oxigênio.
3. 57,5% de sódio, 40% de oxigênio e 2,5% de hidrogênio.

SÉRIE XIII

1. 124,2g de sódio, 86,4g de oxigênio e 5,4g de hidrogênio.
2. 288g de carbono, 384g de oxigênio e 48g de hidrogênio.
3. 134,4g de ferro, 115,2g de enxofre e 230,4g de oxigênio.

SÉRIE XIV

1. $\frac{100}{13}$ *ou 7,69%* (aprox.)
2. 80% de ferro de 20% de areia.
3. 20 kg

10. SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

SÉRIE I

1. $\{(4, 1)\}$
2. $\{(-2, 3)\}$

SÉRIE II

1. $\{(-2, 5)\}$
2. $\{(-7, 3)\}$

SÉRIE III

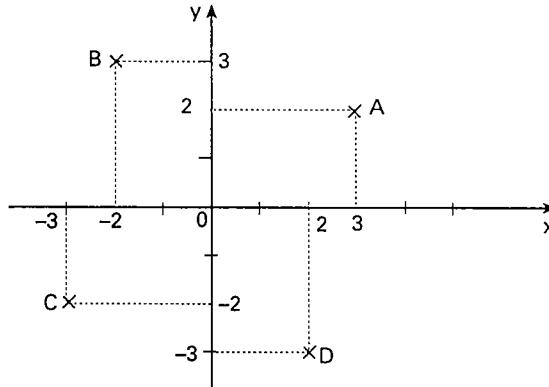
1. $\{(5, 1)\}$
2. $\{(-2, 3)\}$

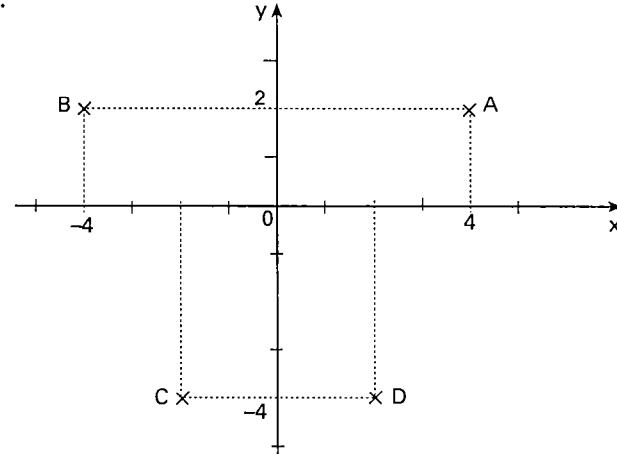
SÉRIE IV

1. $\{(4, -1)\}$
2. $\{(-1, 3)\}$

SÉRIE V

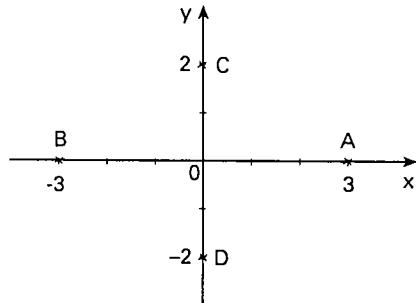
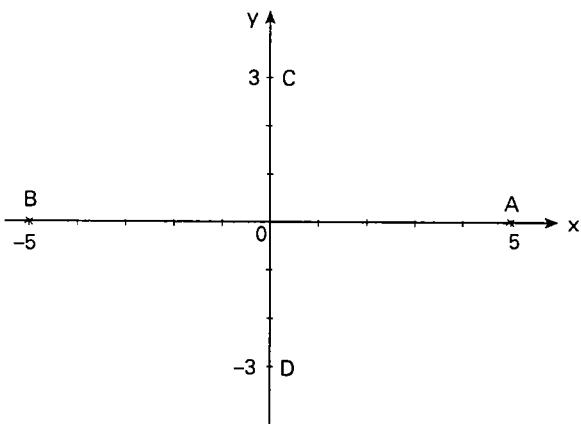
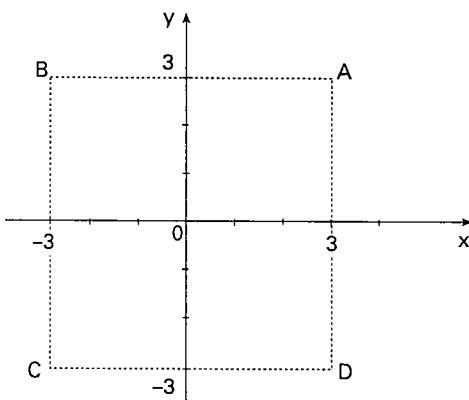
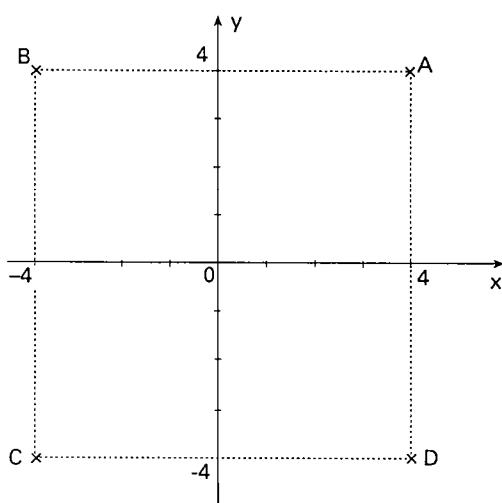
1. $\{(4, 3)\}$
2. $\left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

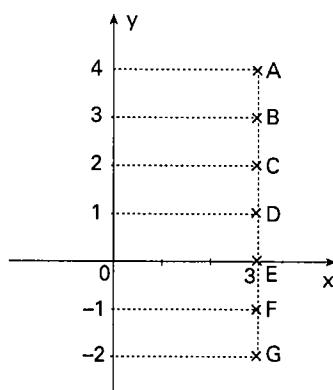
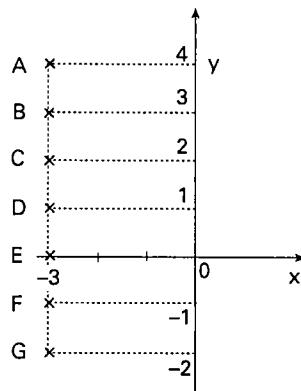
SÉRIE VI

1. $\{(1, -2)\}$
2. $\{(-1, 3)\}$

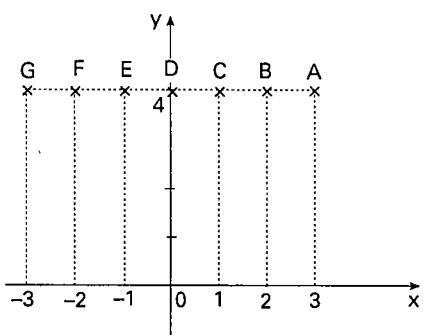
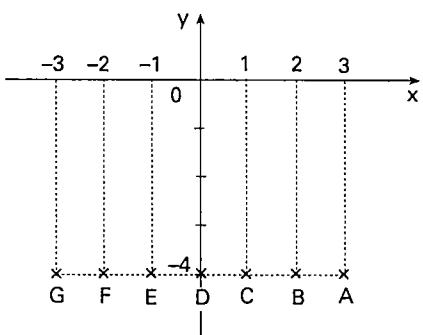
SÉRIE VII

1. 11 e 3
2. $\frac{8}{5}$

11. Representação Cartesiana

SÉRIE I

1.

2.

SÉRIE II

1.

2.

SÉRIE III

1.

2.

SÉRIE IV

1.

2.

SÉRIE V

1.

2.

SÉRIE VI

1.

SÉRIE VII

SÉRIE VIII

1.

2.

SÉRIE IX

1.

2.

SÉRIE X

1.

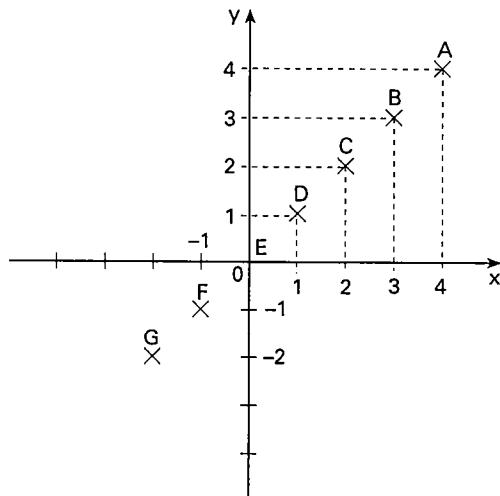
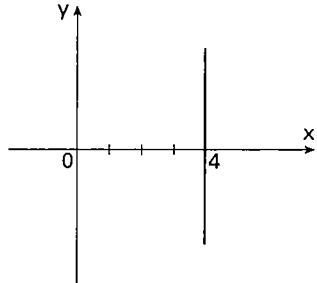
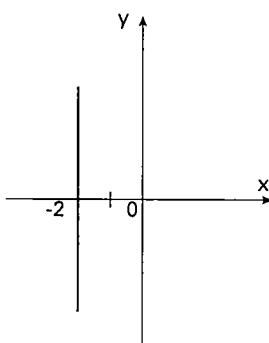
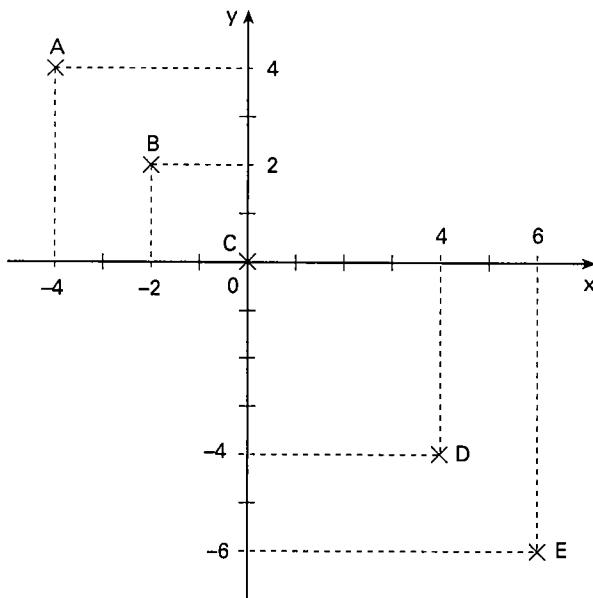
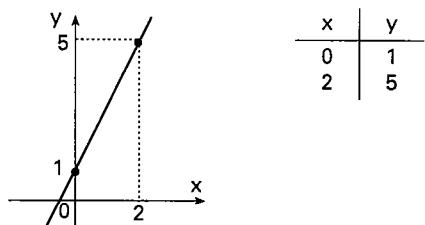
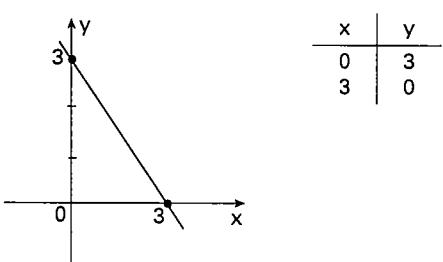
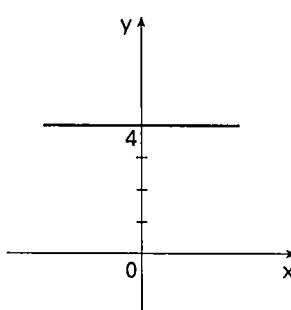
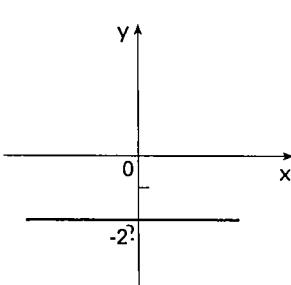
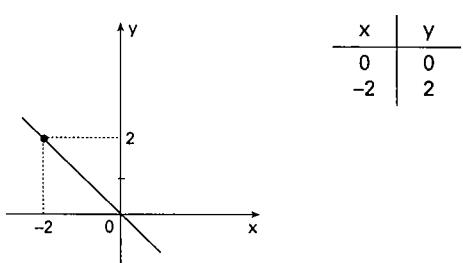
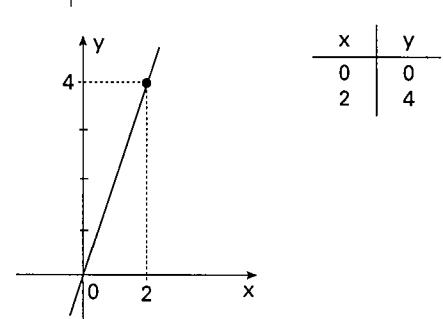
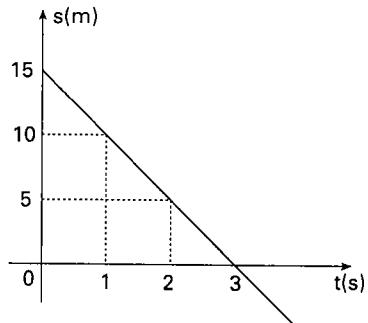
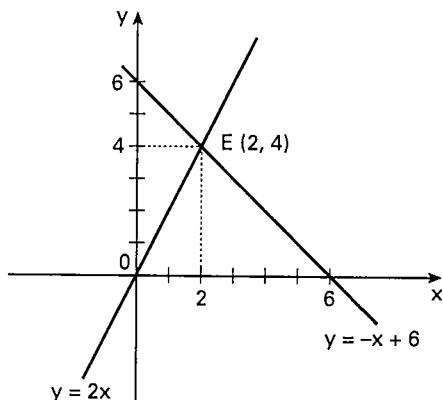
x	y
0	1
2	5

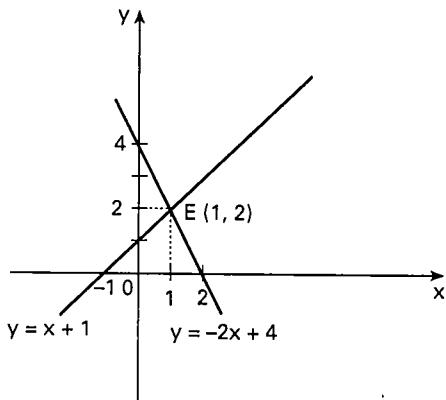
2.

x	y
0	3
3	0

x	y
0	0
2	4

4.

x	y
0	0
–2	2

SÉRIE XI

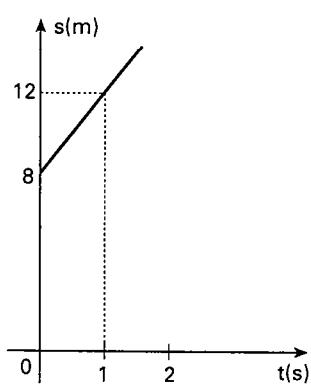
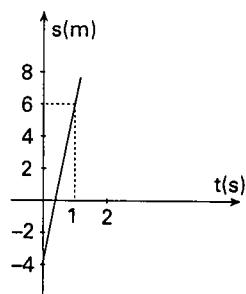
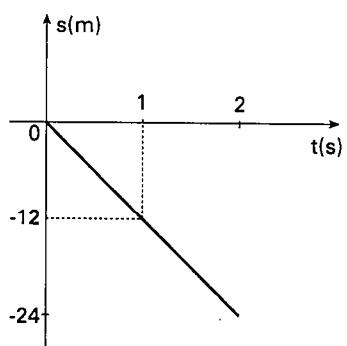
1. $y = 2x - 3$
2. $y = -\frac{3}{4}x + 3$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = -\frac{2}{3}x$

SÉRIE XII

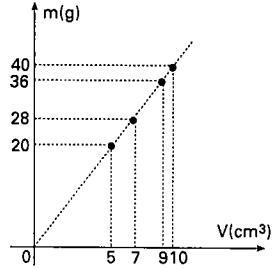
1. E(2, 4)

2. E(1, 2)

SÉRIE XIII

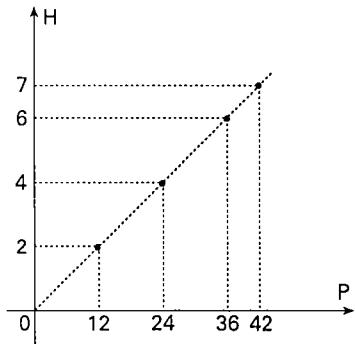
1.

2.

3.

4.

SÉRIE XIV

1. $s = -15 + \frac{15}{2}t$
2. $s = 5 + 5t$
3. $s = 10 - \frac{10}{3}t$
4. $s = -10t$

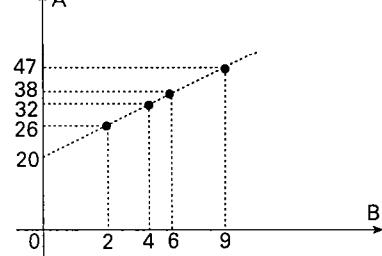
12. Grandezas Proporcionais

SÉRIE I

1. *a)* Sim
   b) $k = 4\,g/cm^3$
   c)

2. *a)* Sim

b) $k = \frac{1}{6}$

c)

3. *a)* I e III

b) (I) $P = k_1T$; (III) $T = k_2V$

SÉRIE II

1. *a)* Não, pois $\frac{26}{2} \neq \frac{32}{4}$

b) Sim, pois $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{6}{2} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$

c)

d) $k = 3$

e) $A = 3B + 20$

2. *a)* Não, pois $\frac{20}{3} \neq \frac{28}{5}$

b) Sim, pois $\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{24}{6} = 4$

SÉRIE III

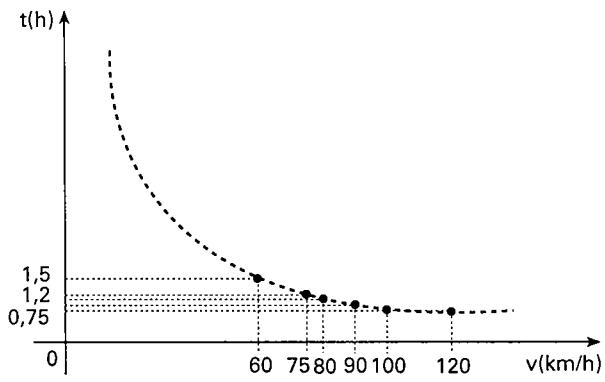
1. *a)* Não
b) Sim
c) Sim
d) Sim
e) 22,5 atm

2. *a)* Sim, pois $\frac{20}{5} = \frac{30}{7,5} = \frac{60}{15} = \frac{70}{17,5}$
b) 100g
c) $12,5 cm^3$
d) $k = 4 g/cm^3$
e) III

3. Sim
4. Não

SÉRIE IV

1. *a)* Sim, pois $100 \cdot 300 = 75 \cdot 400 = 60 \cdot 500 = 50 \cdot 600$

b) Não, pois $\frac{\Delta d}{\Delta T} = \frac{25}{100} \neq \frac{40}{200}$

2. Sim
3. Não

SÉRIE V

1. *a)* II
b) III
c)

d) 108km/h
e) 72min

2. *a)* errado
b) certo
c) errado
d) IV

3. *a)* I
b) III
c) II

4. *a)* $k = 3$
b) $\frac{\Delta C}{\Delta D} = 4$
c) $k = 36$
d) 1
e) 3
f) 2

13. Noções de Geometria Plana

ÂNGULOS

SÉRIE I	SÉRIE II	SÉRIE III	SÉRIE IV
1. 55°	*1.* 110°	*1.* 46°35'	*1.* 46°34'42"
2. 50°	*2.* 85°	*2.* 28°47'	*2.* 28°46'33"
3. 30°	*3.* 120°	*3.* 17°13'	*3.* 17°12'47"
4. 15°	*4.* 45°	*4.* 6°51'	*4.* 6°50'08"

SÉRIE V
1. 106°32'
2. 94°24'
3. 79°48'
4. 32°19'

SÉRIE VI
1. 106°31'13"
2. 94°33'41"
3. 79°47'28"
4. 32°18'52"

SÉRIE VII
1. $x = 30°$
2. $x = 70°$
3. $x = 25°$

SÉRIE VIII
1. $x = 70°$
2. $x = 30°$
3. $x = 50°$

SÉRIE IX
1. $x = 25°$
2. $x = 30°$
3. $x = 60°$

SÉRIE X
1. $x = 65°$
2. $x = 25°$
3. $x = 16°$

SÉRIE XI
1. $x = 55°$
2. $x = 40°$
3. $x = 25°$

SÉRIE XII
1. 65° e 25°
2. 60° e 30°
3. 63° e 27°

SÉRIE XIII
1. 120° e 60°
2. 125° e 55°
3. 126° e 54°

RETAS PARALELAS

SÉRIE I
1. $x = 50°$
2. $x = 30°$
3. $x = 80°$

SÉRIE II
1. $x = 17°$
2. $x = 20°$
3. $x = 35°$

SÉRIE III
1. $x = 27°$
2. $x = 20°$
3. $x = 18°$

SÉRIE IV
1. $x = 72°$
2. $x = 33°$
3. $x = 42°$

TRIÂNGULOS

SÉRIE I
1. $x = 30°$
2. $x = 80°$
3. $x = 35°$

SÉRIE II
1. $x = 20°$
2. $x = 30°$
3. $x = 18°$

SÉRIE III
1. $x = 30°$
2. $x = 45°$
3. $x = 60°$

SÉRIE IV
1. $x = 45°$
2. $x = 18°$
3. $x = 20°$

SÉRIE V
1. $x = 140°$
2. $x = 75°$
3. $x = 15°$

SÉRIE VI
1. $x = 130°$
2. $x = 40°$
3. $x = 30°$

SÉRIE VII
1. $x = 30°$
2. $x = 40°$
3. $x = 20°$

SÉRIE VIII
1. $x = 70°$
2. $x = 25°$
3. $x = 20°$

14. Semelhança de Triângulos

SÉRIE I
1. DF = 5 cm e EF = 4 cm
2. DF = 18 cm e EF = 15 cm
3. DF = 27 cm e EF = 33 cm

SÉRIE II
1. DE = 5 cm e AE = 6 cm
2. DE = 6 cm e AE = 5 cm
3. DE = 9 cm e AE = 15 cm

SÉRIE III
1. AD = 7 cm e AE = 5 cm
2. AB = 39 cm e BD = 12 cm
3. BC = 26 cm e DE = 5 cm

15. Razões Trigonométricas

SÉRIE I
1. 10
2. $7\sqrt{2}$
3. 13

SÉRIE II
1. 9
2. 4
3. 10

SÉRIE III
1. $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$
   $\text{sen}\,\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{12}{5}$
2. $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$
   $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$
3. $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$
   $\text{sen}\,\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{8}{15}$

SÉRIE IV
1. $x = 6$
2. $x = 5$
3. $x = 3$

SÉRIE V
1. $x = 5$
2. $x = 3\sqrt{2}$
3. $x = 9$

SÉRIE VI
1. $x = 7\sqrt{2}$
2. $x = 3$
3. $x = 4$

SÉRIE VII
1. $x = 5\sqrt{3}$ e $y = 5$
2. $x = 3$ e $y = 3$
3. $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{15}{2}$

SÉRIE VIII
1. $4\sqrt{2}$ km
2. $4\sqrt{3}$ m
3. 75 m

SÉRIE IX
1. $x = 9$
2. $x = 5$

16. Equação do 2º grau

SÉRIE I
1. {3, 5}
2. {−2, 3}
3. {−4, 1}
4. {−3, −2}

SÉRIE II
1. {0, 2}
2. $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$
3. {−3, 3}
4. $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

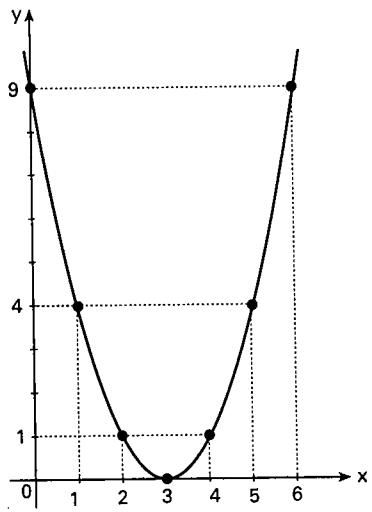
SÉRIE III
1. {3}
2. {−5}
3. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
4. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

SÉRIE IV
1. ∅
2. ∅
3. ∅
4. ∅

SÉRIE V
1. {0, 8}
2. {−3, 3}
3. $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$
4. {−1, 4}

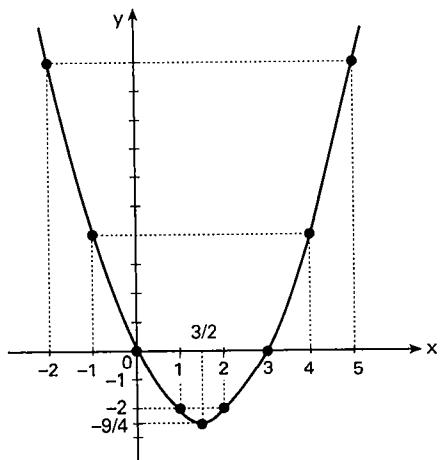
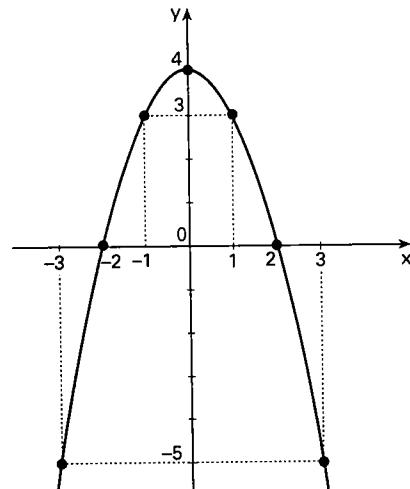
17. Trinômio do 2º grau

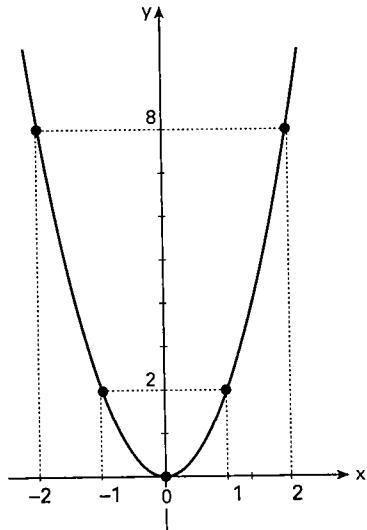
SÉRIE I

1.

x	y
0	8
1	3
2	0
3	−1
4	0
5	3
6	8

2.

x	y
−1	−9
0	−3
1	−1
2	−3
3	−9

3.

x	y
0	9
1	4
2	1
3	0
4	1
5	4
6	9

4.

x	y
−2	10
−1	4
0	0
1	−2
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$
2	−2
3	0
4	4
5	10

5.

x	y
−3	−5
−2	0
−1	3
0	4
1	3
2	0
3	−5

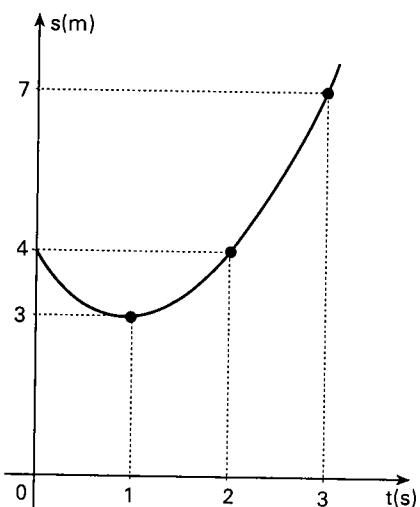
6.

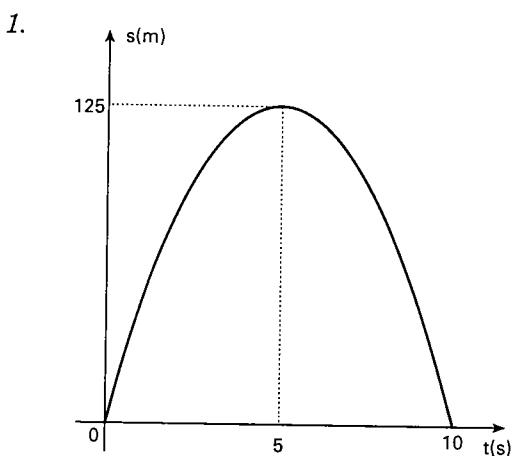
x	y
2	8
−1	2
0	0
1	2
−2	8

SÉRIE II

1. 2 ou 3
2. −3 ou 2
3. 2
4. $-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$

SÉRIE III

1. V(1, 1)
2. V(−1, 2)
3. V(3, 7)
4. V(4, 16)

SÉRIE IV

1. −4 (mínimo)
2. 4 (máximo)
3. $\frac{5}{2}$ (mínimo)
4. $-\frac{2}{3}$ (máximo)

SÉRIE V

1. $x = -3$
2. $x = 2$
3. $x = 3$
4. $x = 0$

SÉRIE VI

1. $y = x^2 + x - 6$
2. $y = -2x^2 + 4x - 3$
3. $y = x^2 - 3x$
4. $y = 2x^2 - 5$

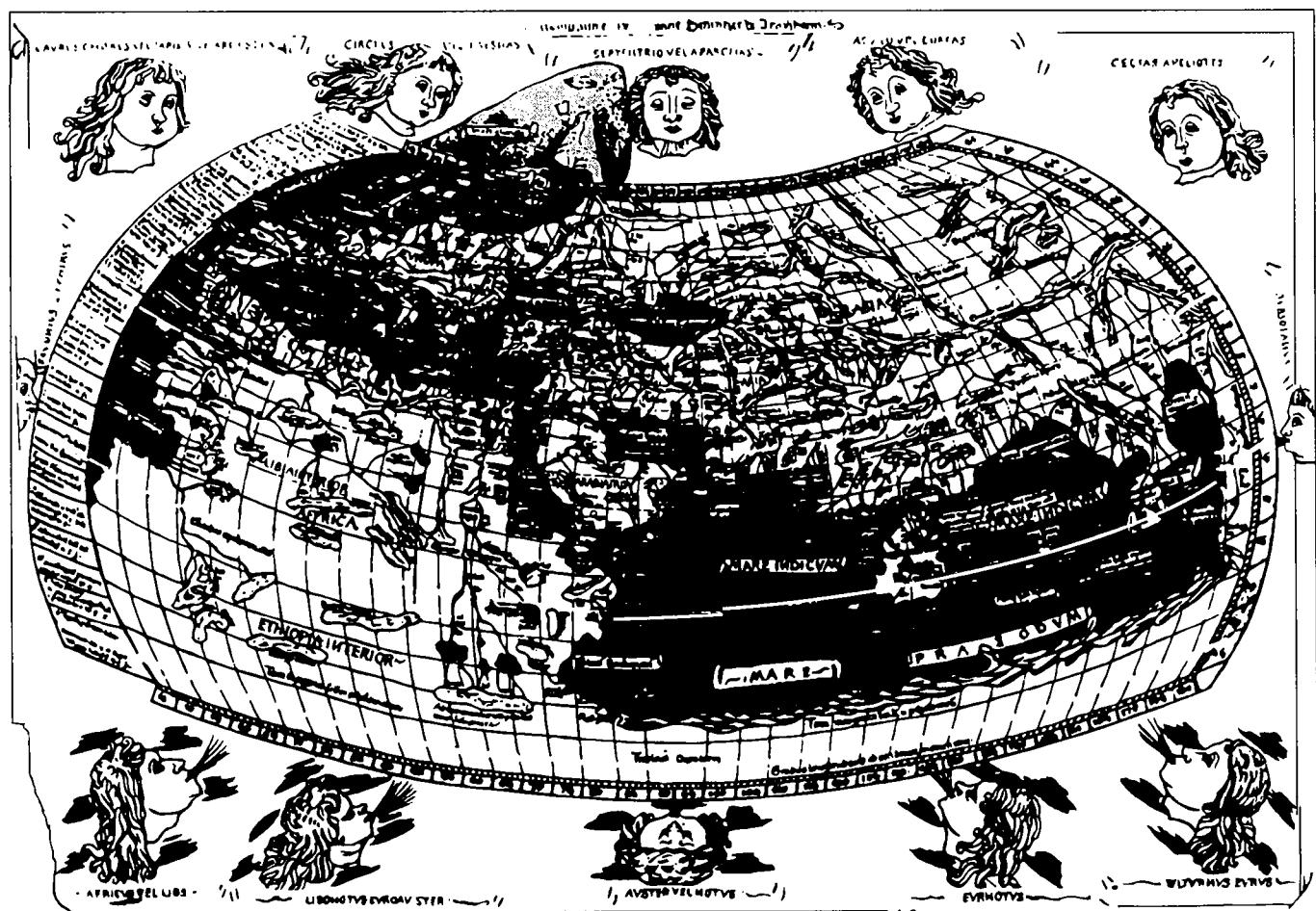
SÉRIE VII

1.

2.

SÉRIE VIII

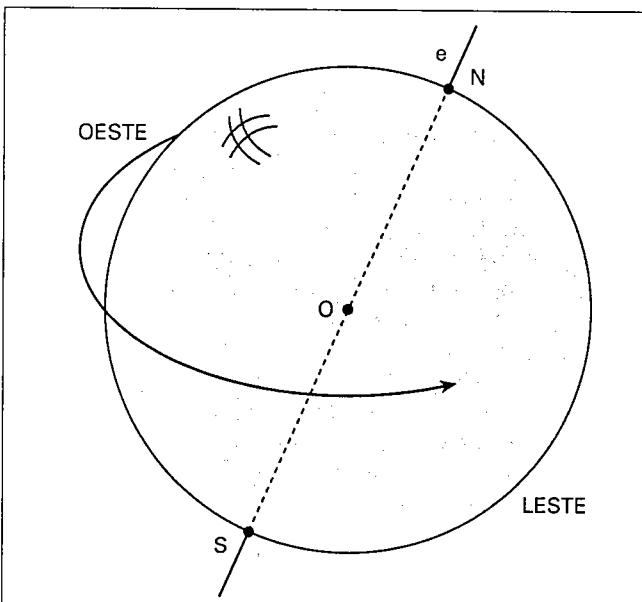
1. $s = 105 + 20t - 5t^2$
2. $s = 10 + 20t - 2t^2$

GEOGRAFIA

1 Noções Espaciais

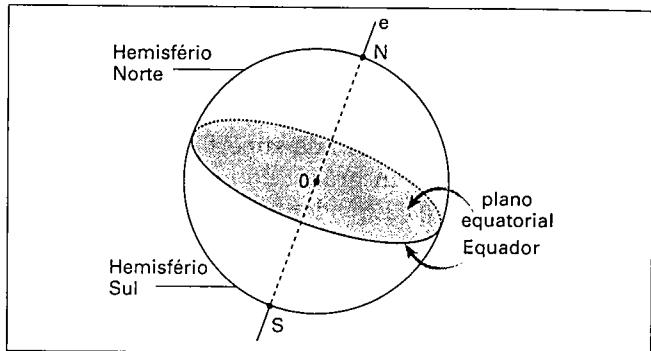
1 — Conceitos Básicos

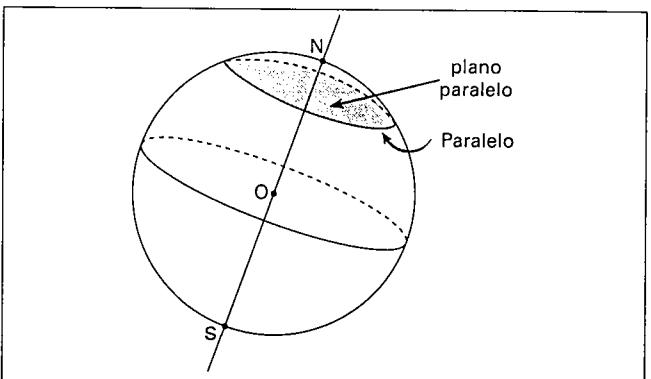
A Terra, considerando-se a sua dimensão, é o quinto maior planeta do Sistema Solar. Trata-se de um astro de pequenas dimensões, quando comparado ao gigante do Sistema Solar, Júpiter, que tem um diâmetro onze vezes maior que a Terra, ou ao próprio Sol, 190 vezes maior que ela.

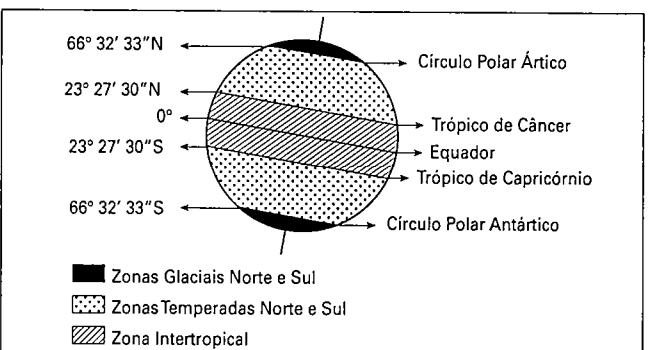
A maior parte da humanidade, no entanto, quase sempre desconheceu esses dados e para ela a Terra sempre pareceu um lugar imenso. Na Antiguidade, a sensação de dimensão do planeta era diferente da que temos hoje. O lento deslocamento do homem sobre a superfície terrestre lhe dava a sensação de que as distâncias entre os diferentes lugares eram muito grandes. À medida que o homem ampliou seu horizonte geográfico, alcançando lugares cada vez mais distantes dos primeiros núcleos civilizatórios, tornou-se mais importante encontrar métodos para medir as distâncias e cartografar os longos caminhos percorridos.

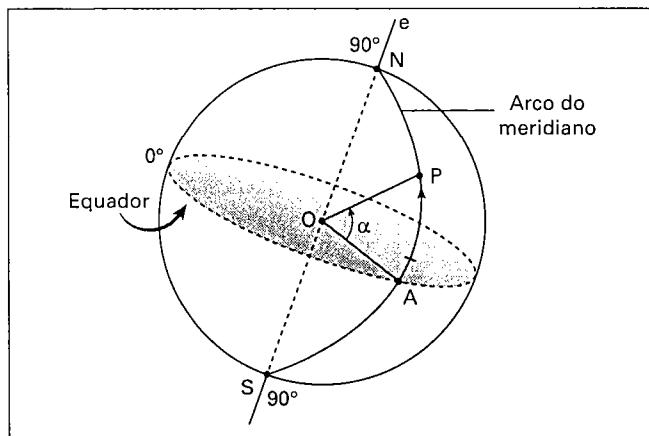
THROWER, Norman J.W. — maps & civilization. Chicago Press, 1972, Chicago, pág. 61.

O mapa mundi de Cláudio Ptolomeu, que viveu na Grécia no século II, retrata o mundo conhecido da época, sem a América e Austrália.

A noção de dimensão do planeta, no entanto, variou ao longo da História. Hoje, graças ao desenvolvimento tecnológico, a velocidade das comunicações e dos transportes, cria uma sensação de redução do espaço e do tempo. Ocorre assim, segundo Milton Santos, um encurtamento do espaço-tempo, pois as viagens parecem mais curtas e mais rápidas na era do mundo globalizado.

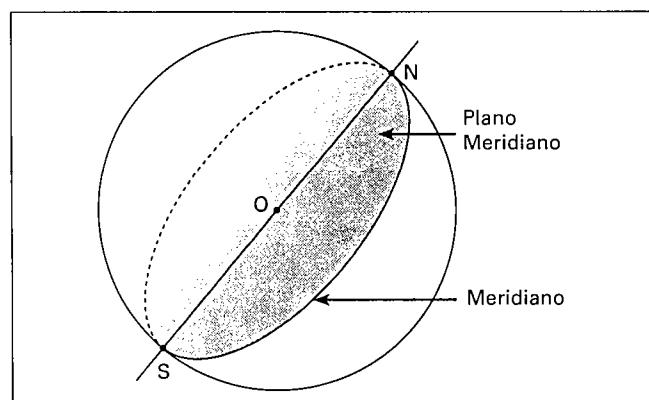
Assim, o desenvolvimento da civilização, e com ela a ampliação do conhecimento técnico, permitiu o aperfeiçoamento das noções espaciais. Hoje, com um GPS (*Global Positioning System*) somos capazes de determinar a posição de um ponto sobre a superfície do planeta, que mede mais de 510 milhões de km^2, com uma precisão de centímetros.

Para chegar a isso houve um lento processo de evolução, que teve início há mais de 3 mil anos. Uma das primeiras definições importantes, relacionadas a esse assunto, surgiu da observação que nosso planeta apresenta um importante movimento, denominado de **rotação**, originando os dias e as noites. Observe:

O eixo da Terra (e) contém o seu centro (o) e intercepta a sua superfície no Pólo Norte (N) e no Pólo Sul (S) geográficos. Sobre esse eixo imaginário a Terra gira no sentido Oeste-Leste.

Embora deduzida por diferentes povos da Antiguidade, a comprovação científica da rotação terrestre só viria a ocorrer em 1851, com a famosa experiência do pendulo realizada por Leon Foucault (1819-68). Hoje sabemos que uma rotação terrestre completa dura 23 horas, 56 minutos e 4 segundos, período de tempo conhecido pela denominação de dia (por convenção internacional o dia tem 24 horas).

Para aprofundarmos nossa noção sobre o espaço terrestre vamos definir o conceito de **plano equatorial**. Trata-se do plano perpendicular ao eixo terrestre (e) e que contém o centro da Terra (o). Esse conceito permite definir o que é o **Equador**. Observe:

O **Equador** é a circunferência intersecção do plano equatorial com a superfície da Terra. O Plano Equatorial divide a Terra em duas partes iguais, denominadas Hemisférios Norte e Sul.

Os **paralelos** são determinados por qualquer circunferência intersecção da superfície terrestre com qualquer plano perpendicular ao seu eixo. Observe:

Podemos traçar quantos paralelos quisermos sobre a superfície terrestre. O Equador é o maior dos paralelos terrestre.

Os planos dos paralelos são perpendiculares ao eixo da Terra, portanto são paralelos ao plano do Equador (o que explica a sua denominação dada ainda na Antigüidade). Os paralelos são em número infinito, no entanto, quatro deles são notáveis, porque servem para delimitar as Zonas Climáticas do planeta. Observe a figura:

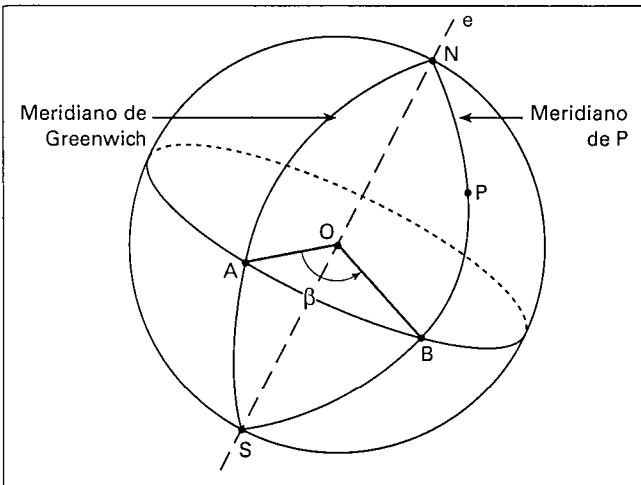
Os trópicos indicam os pontos da superfície terrestre onde os raios solares incidem perpendicularmente, nos dias 21 de junho (Hemisfério Norte — Trópico de Câncer) e 21 de dezembro (Hemisfério Sul — Trópico de Capricórnio).

Com o desenvolvimento das navegações tornou-se necessário o uso de medidas que pudessem localizar, com precisão, um ponto qualquer na superfície terrestre. Primeiramente criou-se o conceito de **latitude.** A latitude de um ponto (P) da superfície terrestre é a medida angular α, em graus, do arco do meridiano compreendido entre o Equador e esse ponto. Observe:

A latitude pode variar de 0° a 90° para o Sul ou Norte. Observe que o ponto (P), que queremos encontrar na superfície terrestre, é cortado por um meridiano que também corta o Equador (ponto A). Para saber a latitude basta verificar a medida angular entre A e P.

Até o final do século XVII os navegadores, responsáveis pela descoberta das Américas e outros grandes feitos marítimos, circulavam pelos oceanos do mundo dispondo apenas de precários instrumentos baseados na noção de latitude. Não se conhecia ainda uma forma precisa de orientação para Leste e Oeste. O seu desenvolvimento só viria a ocorrer com a criação e uso da medida de longitude (baseada no conceito de meridianos).

Desde a Antiguidade já se sabia que além dos paralelos poderíamos traçar sobre a superfície de uma esfera outro tipo de linha, conhecida como **meridiano.** O **plano meridiano** é qualquer plano que contenha o eixo terrestre (e). Observe:

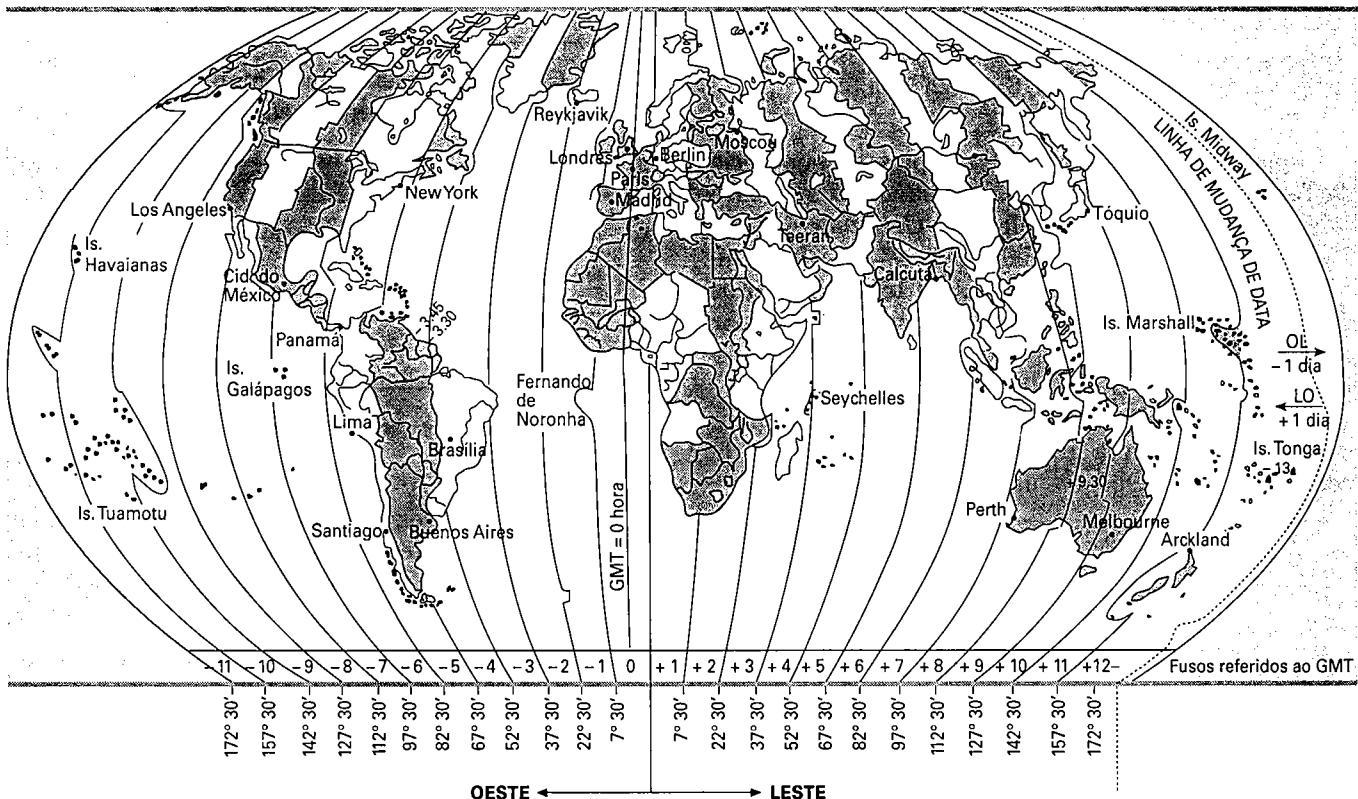
A intersecção de um plano meridiano com a superfície terrestre é uma circunferência que fica dividida pelos pólos em duas semi-circunferências denominadas de **meridianos.**

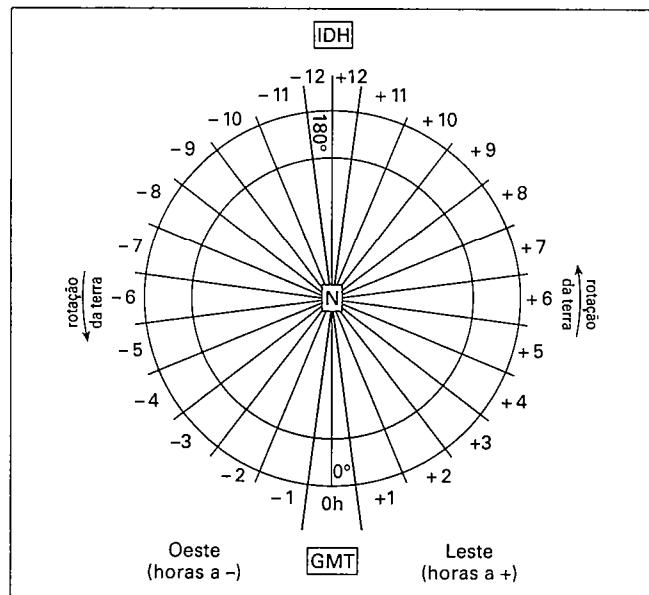
Como vimos anteriormente o Equador é a maior das linhas paralelas, servindo assim como ponto inicial para a medida das latitudes, nas direções Norte e Sul. Os meridianos, no entanto, não se diferenciam entre si, pois tem todos a mesma dimensão. Sendo assim, nenhum meridiano podia ser utilizado como referencial das direções Leste e Oeste. Tornou-se então necessário definir aquele que seria o "meridiano origem", ou seja, o marco zero, pois a partir desse ponto se definiriam as longitudes e os fusos horários. Foi escolhido para isso o meridiano de Greenwich, em 1884.

A DEFINIÇÃO DO MERIDIANO DE GREENWICH

Antes que houvesse, no século XIX, a convenção internacional que definiu um meridiano inicial, as noções de longitude e fusos horários eram bastante confusas. Durante muito tempo cada país utilizava como meridiano base aquele que atravessava sua capital: o Brasil utilizava o meridiano do Observatório do Castello, no Rio de Janeiro; a França utilizava o meridiano de Paris; os Estados Unidos usavam o meridiano de Washington; a Inglaterra o meridiano que passa pelo Observatório de Greenwich, em Londres, e assim por diante. Essa situação criava inúmeros embaraços nas relações entre países, dificultando as comunicações, as relações comerciais e a navegação marítima, principal meio de transportes entre os continentes da época.

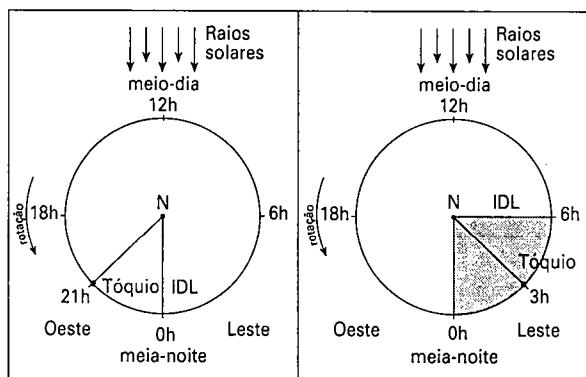
Em função da história marítima da Inglaterra e do seu grande poder sobre os mares, a maior parte das embarcações do mundo passou a adotar o meridiano de Greenwich como seu referencial para medir a longitude e demarcar os fusos horários. No entanto, alguns países, principalmente a França, ainda se opunham à definição de Greenwich como o meridiano principal. Foram feitas então, inúmeras tentativas de negociação, até que finalmente se encontrou uma solução: todos adotariam Greenwich como marco inicial e a Inglaterra passaria a adotar o sistema métrico decimal.

Sendo assim, em 1884, foi assinado o Acôrdo de Washington, pelo qual se passaria a tomar Greenwich como referencial de longitude e de fuso horário. O que determinou o sucesso do acordo, foi a união de esforços políticos entre a Inglaterra, nação que influenciava o mundo todo através de seu colonialismo, e os Estados Unidos, nação que necessitava de precisão horária, já que seu território, todo ligado por ferrovias transcontinentais, abrangia seis fusos horários.

Podemos agora definir com precisão o conceito de **longitude.** Longitude de um ponto (P) da superfície terrestre é a medida angular β, em graus, do arco do Equador que está entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa por esse ponto. Observe:

A longitude pode variar de 0° a 180° para o Leste ou Oeste. Para a mediação da longitude de um ponto (P), verificamos qual é o meridiano que passa por ele e que também cruza o Equador (β). Observe que o meridiano de Greenwich cruza o Equador no ponto A. Portanto, a longitude é a medida angular entre os pontos A e B.

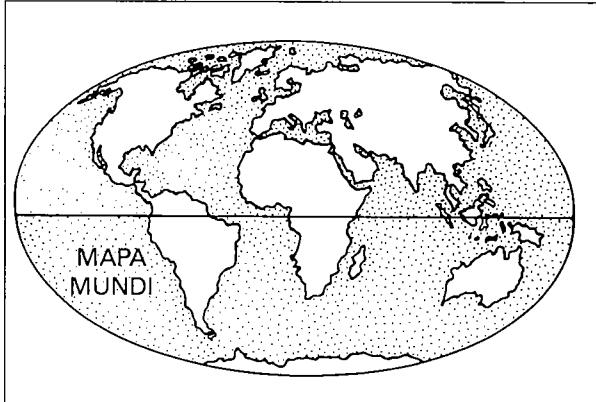
Podemos agora, finalmente, definir o conceito de **Coordenadas Geográficas**. A coordenada geográfica de um ponto (P) na superfície terrestre é dada pela sua latitude e longitude. Conhecendo-se a coordenada de um ponto qualquer ele poderá ser localizado na superfície terrestre.

2 — Fusos Horários

Em função de sua esfericidade, a Terra, em um determinado instante, apresenta diferentes graus de luminosidade, aos quais se convencionou determinar faixas, com diferentes horários. Essas faixas são denominadas de **fusos horários**. Eles foram criados a partir da observação de que a Terra, a cada 1 hora, gira 15°, completando os 360° após 24 horas. Portanto, cada 15° da esfera terrestre corresponde a 1 hora da sua rotação. Observe o mapa:

Todos os fusos têm sua hora definida em relação ao fuso do meridiano inicial de Greenwich (GMT - Greenwich Mean Time). Em função da rotação terrestre de Oeste para Leste as horas aumentam ou estão sempre adiantadas nos locais situados para o Leste (oriente) de um ponto.

O planeta tem 24 fusos horários, sendo 22 inteiros, com 15° cada e equivalentes à 1 hora; e 2 fusos divididos ao meio, com 7° e 30' cada lado (ambos com o mesmo horário). Observe:

O fuso cortado ao meio pelo meridiano de Greenwich, por convenção, adota em toda a sua superfície, o mesmo horário, por isso se fala em tempo médio de Greenwich (G.M.T. Greenwich Mean Time).

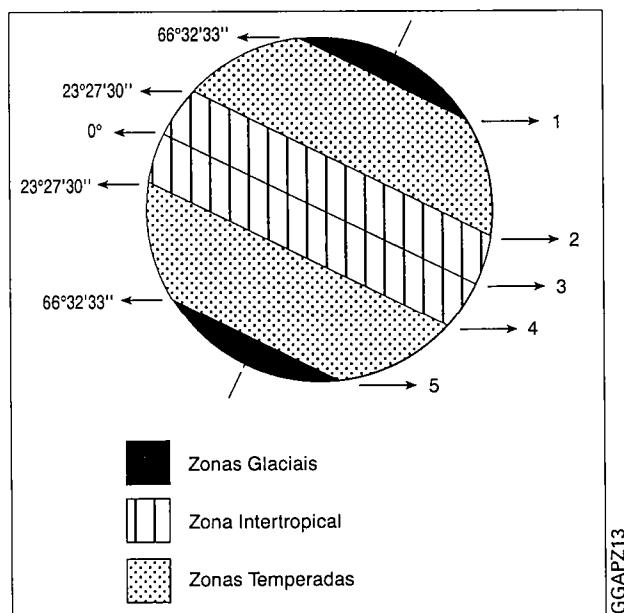
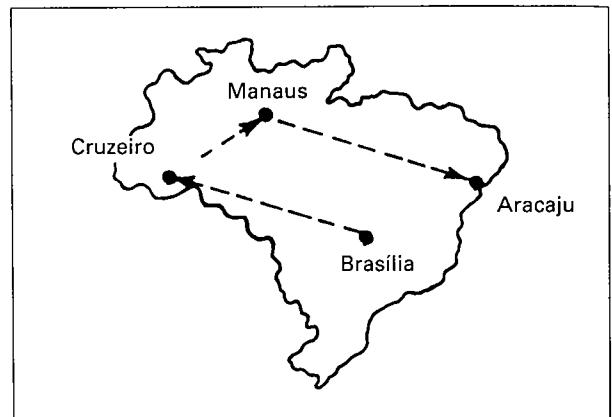
Veja bem: o fuso horário é o espaço da superfície da Terra localizado entre dois meridianos. Como o fuso inicial está cortado ao meio pelo *Greenwich Mean Time,* os limites do fuso inicial estão a 7° 30' para Leste e Oeste. A esse valor soma-se sempre 15° para obter os próximos fusos. Fato semelhante ocorre no fuso por onde passa a Linha Internacional de Data (I.D.L. — *Internacional Date Line*), também cortado ao meio.

A hora e a data de qualquer local muda a medida em que o planeta gira em torno de seu eixo, de oeste para leste. Observe esse exemplo:

No desenho à esquerda notamos que Tóquio está com o horário de 21h. Nesse instante a data é, digamos, 23 de agosto. Na I.D.L. é meia-noite (Zero hora). Seis horas mais tarde, no desenho à direita, vemos que um novo dia (24 de agosto) já começou (representado pela zona cinza) e que Tóquio já está com 3 h desse novo dia e na IDL são 6 horas.

Exercícios

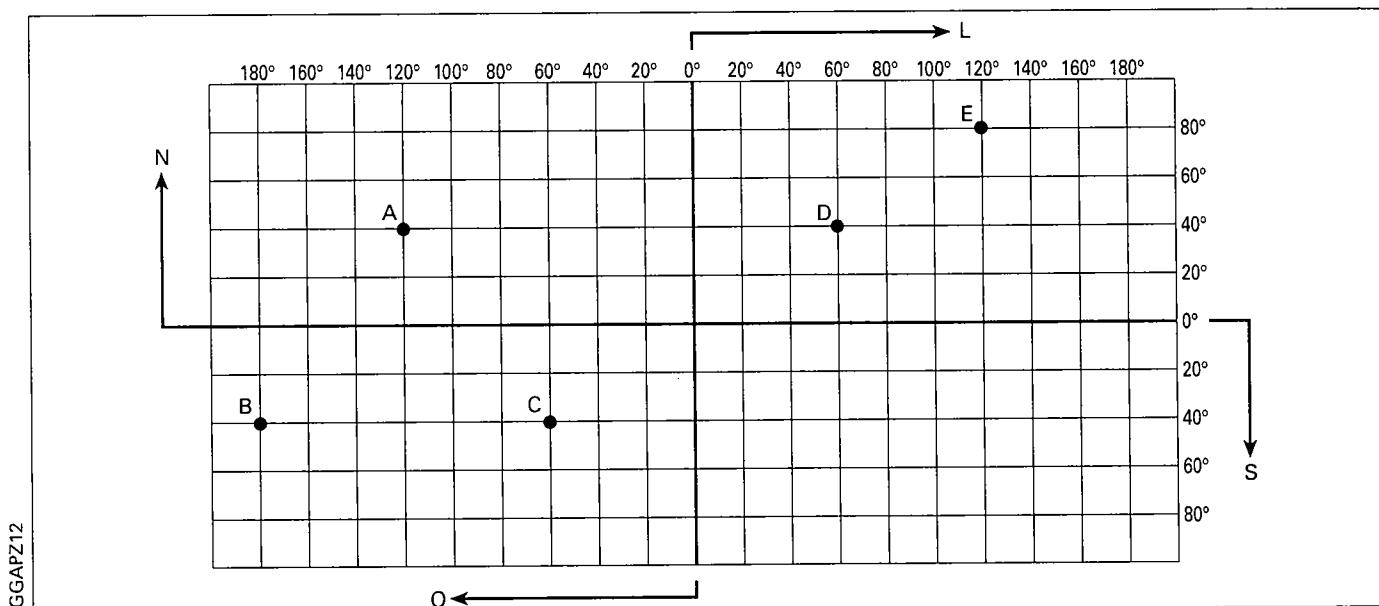
1. Assinale a alternativa que apresenta, de forma correta, todas as denominações possíveis para um mesmo hemisfério:
   a) Norte, Boreal, Austral.
   b) Leste, Boreal, Oriental.
   c) Sul, Austral, Meridional.
   d) Oeste, Ocidental, Oriental.
   e) Austral, Oriental, Meridional.

2. Observe o mapa-mundi abaixo e responda:

   a) Qual é o hemisfério continental?
   b) Qual é o hemisfério oceânico?

3. Alguns paralelos servem para dividir a Terra em Zonas Climáticas. Assinale a alternativa que contenha a zona que ocupa a maior parte da superfície terrestre:
   a) Glacial Ártica.
   b) Temperada Norte.
   c) Intertropical.
   d) Temperada Sul.
   e) Glacial Ártica.

4. Usando suas palavras defina Coordenadas Geográficas.

5. Escreva o nome dos paralelos numerados no desenho abaixo:

1 ______________________
2 ______________________
3 ______________________
4 ______________________
5 ______________________

6. No mapa abaixo estão traçadas setas que indicam a rota de um avião. Observe:

a) A seta que indica variação de latitude de menor para a maior é a que vai de ____________ ____________ para ____________.

b) A seta que indica variação de longitude de menor para a maior é a que vai de ____________ ____________ para ____________.

Instruções para as questões 7 a 9: temos abaixo uma canevá, ou seja, um mapa com o conjunto de paralelos e meridianos. Baseado na sua observação responda as perguntas.

7. Indique as coordenadas geográficas dos seguintes pontos:

A
Latitude: ____________
Longitude: ____________

B
Latitude: ____________
Longitude: ____________

C
Latitude: ____________
Longitude: ____________

D
Latitude: ____________
Longitude: ____________

E
Latitude: ____________
Longitude: ____________

8. Quais os horários nos pontos A,B,D e E sabendo-se que são 12h em C?

A = ______h. D = ______h.
B = ______h. E = ______h.

9. Indique a Zona Climática em que estão situados os pontos abaixo:

A = ______________________________
B = ______________________________
C = ______________________________
D = ______________________________
E = ______________________________

10. Com o auxílio de um Atlas, calcule a hora nas seguintes cidades, considerando que em Brasília são 12:00h.

a) Los Angeles (EUA) = ______h.

b) Nápoles (Itália) = ______h.

c) Leningrado (Rússia) = ______h.

d) Tóquio (Japão) = ______h.

e) Pretória (África do Sul) = ______h.

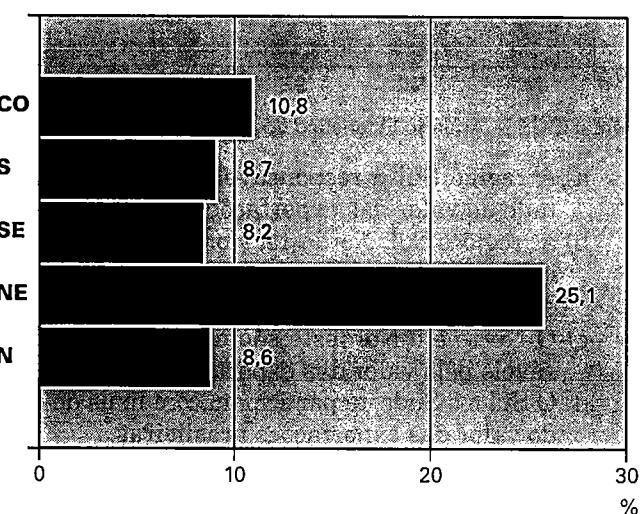
2 O Uso de Gráficos na Geografia

A representação gráfica é uma das mais poderosas formas de comunicação e seu uso hoje está disseminado por todos meios da mídia, fazendo parte do cotidiano das pessoas. Mas, nem sempre foi assim. O uso de gráficos tornou-se crescente após 1853, quando foi organizado em Bruxelas, na Bélgica, o primeiro Congresso Internacional de Estatísticas. Até a década de 1930, no entanto, era ainda assunto para especialistas, sendo raro o seu uso em documentos impressos acessados pelo grande público.

Isso começou a mudar, de forma radical, após o *crack* da Bolsa de Nova Iorque, em 1929: esse importante evento contribuiu para que os gráficos passassem a fazer parte do cotidiano das pessoas, que acompanhavam ansiosamente as variações diárias dos preços das ações da Bolsa, por meio dos gráficos estampados nas primeiras páginas dos jornais da época.

Os gráficos são uma linguagem específica, com base em análises quantitativas, assentadas em conceitos matemáticos. Com um pouco de treino podemos desenvolver nossa capacidade de **ver** as informações contidas em qualquer tipo de gráfico e assim compreender melhor os conceitos por eles apresentados.

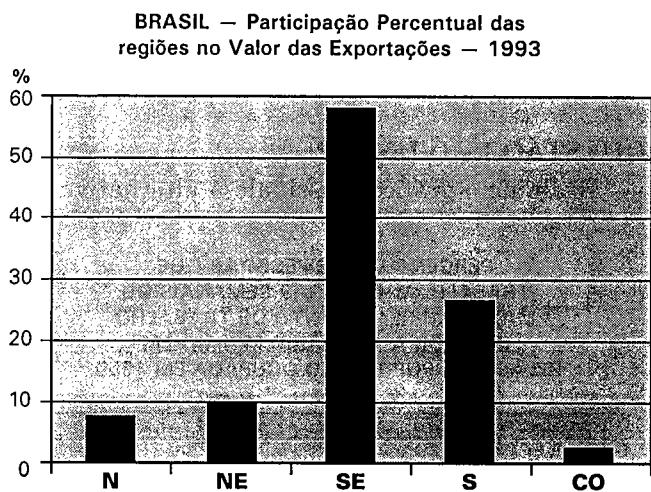
Em sua essência, todo gráfico deve responder a três questões básicas: **o quê, onde e quando**. Seu uso na Geografia visa transmitir informações precisas sobre os fatos estudados por essa ciência, sem gerar ambigüidades. Portanto, os gráficos não podem ser vistos como meras ilustrações, já que eles revelam conceitos e conteúdos, tornando-se parte essencial do texto.

Cabe a nós interpretá-los de forma correta!

1 — Gráficos de Barras ou Colunas Simples

São os gráficos que utilizam retângulos, respectivamente, horizontais ou verticais, para representar grandezas. Os gráficos de barras e os de colunas simples são ideais para visualizar a proporção entre as quantidades, mostrando a relação entre os lugares (as regiões brasileiras, no caso da primeira questão a seguir) e o fato geográfico a ser representado (a população trabalhadora e as exportações, no caso da segunda questão a seguir). Veja os exemplos:

QUESTÃO 1 - (VUNESP)

Examine o gráfico e assinale a alternativa correta:

PERCENTUAL DE PESSOAS QUE TRABALHAM 40 HORAS SEMANAIS OU MAIS COM RENDIMENTO DE TRABALHO INFERIOR A 1 SALÁRIO MÍNIMO EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO OCUPADA EM 1990.

Fonte: IBGE/PNDA - 1990

a) A sazonalidade do trabalho é responsável pelo menor valor porcentual de pessoas com rendimento inferior a um salário mínimo apresentado pela região Sul.
b) O percentual de pessoas com rendimento inferior a um salário mínimo registrado na região Sudeste indica que ela era o pólo de atração das pessoas que almejavam melhores salários.
c) Por ser uma região de desenvolvimento recente, o Centro-Oeste apresenta o mais elevado percentual de pessoas com rendimento de trabalho inferior a um salário mínimo.
d) O maior valor percentual registrado na região Nordeste significa que ela era um pólo de atração para os trabalhadores que buscavam melhor remuneração.
e) Depois do Nordeste, era a região Norte que apresentava o maior percentual de pessoas recebendo menos de um salário mínimo por 40 horas de trabalho.

QUESTÃO 2 - (VUNESP)

A desigualdade regional é uma característica marcante da economia brasileira. Esta desigualdade reflete-se, também, no que se refere às exportações. Examine o gráfico e assinale a correta:

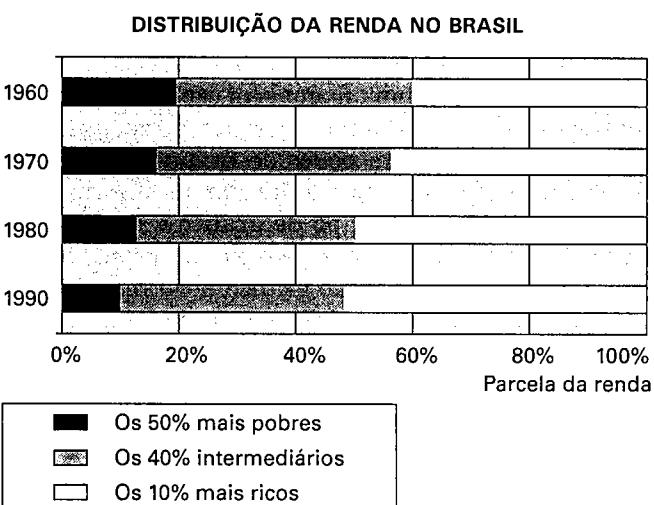
BRASIL — Participação Percentual das regiões no Valor das Exportações — 1993

Fonte: IBGE — Anuário Estatístico do Brasil — 1994

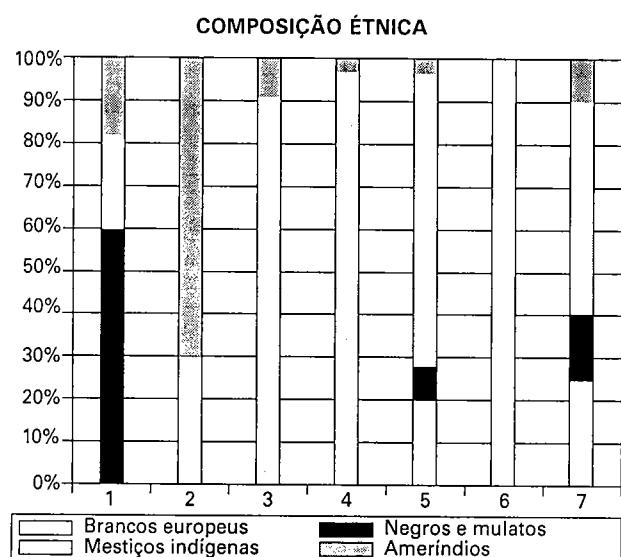
a) A região Sul é responsável por mais da metade do valor das exportações brasileiras.
b) as regiões Sul, Nordeste, Norte e Centro-Oeste responsabilizam-se por mais de 50% do valor das exportações brasileiras.
c) O Norte e o Nordeste são os maiores responsáveis pelo valor das exportações brasileiras.
d) O Sul e o Sudeste participam com mais de 80% do valor das exportações brasileiras.
e) As regiões Centro-Oeste, Norte e Nordeste são responsáveis por 50% do valor das exportações brasileiras.

Repare que no gráfico de barras o examinador reforçou o efeito visual (que por si só seria suficiente para responder a questão) colocando os valores percentuais de cada região. Isso já não aconteceu no gráfico de colunas, mas o eixo das porcentagens permite responder a essa questão, também com uma certa facilidade.

As duas questões dispensam o conhecimento de conceitos geográficos, já que podem ser respondidas por simples raciocínios e deduções feitas a partir dos dados colocados nos gráficos. Em situações como essa é importante identificar qual é o conteúdo da questão (o que se faz pela leitura do título) e a sua forma de representação (nesse caso percentual, relacionada às regiões).

Primeiramente devemos notar os extremos, nesse caso as regiões que se destacavam quanto ao máximo e ao mínimo, bastando para isso verificar o tamanho das colunas ou barras. Posteriormente, devemos realizar as operações matemáticas exigidas em cada alternativa, somando as regiões nelas assinaladas e comparando com os demais dados do gráfico. As duas questões avaliaram a capacidade de interpretação de gráficos que os candidatos tinham.

2 — Gráficos de Barras ou Colunas Compostas

São os gráficos que utilizam retângulos horizontais ou verticais, semelhantes aos anteriores, só que agora compostos por partes, proporcionais às parcelas que compõem os seus totais. Quando os dados são apresentados na forma porcentual todas as barras ou colunas têm o mesmo comprimento (isso é, totalizam 100%) embora estejam subdivididas de formas diferentes, representando as respectivas parcelas de cada uma. Há sempre a necessidade de uma legenda, que identifique cada uma dessas parcelas ou subdivisões. Veja os exemplos abaixo:

QUESTÃO 3 (FUVEST)

Além do grande desequilíbrio apresentado, o gráfico abaixo revela que há:

DISTRIBUIÇÃO DA RENDA NO BRASIL

a) uma estabilidade na participação dos três segmentos da população ativa na renda nacional.
b) uma discreta melhoria no conjunto, com o segmento de renda intermediária crescendo e compensando as perdas dos mais pobres.
c) uma forte tendência do segmento de renda intermediária a ter participação dominante.
d) uma certa constância na participação dos segmentos pobres e intermediários que conseguem deter sempre bem mais de 50% da renda nacional.
e) um progressivo agravamento da situação com a participação do segmento mais pobre decrescendo em favor daquele mais rico.

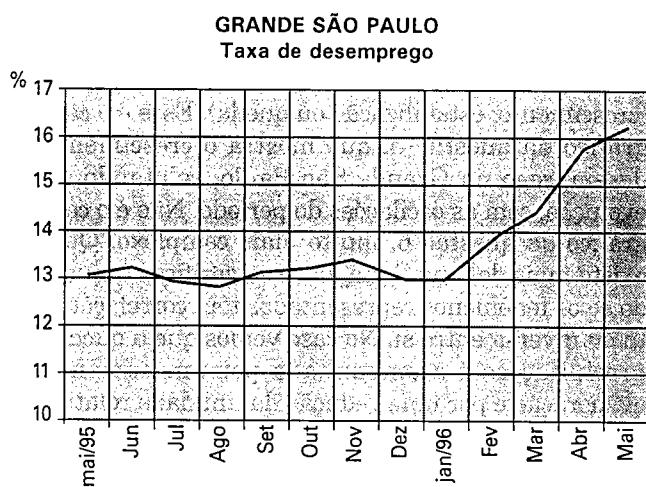
QUESTÃO 4 (GV)

O gráfico abaixo mostra a composição étnica de vários países da América Latina:

Identifique os países de número 2, 5 e 6:

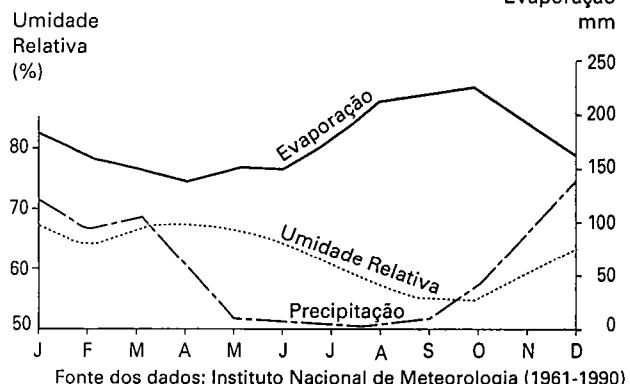
a) Panamá, Guatemala e Haiti.
b) Nicarágua, Panamá e Guatemala.
c) Guatemala, Nicarágua e Costa Rica.
d) Nicarágua, Haiti e Panamá.
e) Guatemala, Costa Rica e Nicarágua.

A leitura de gráficos de barras ou colunas compostas é mais difícil que o caso anterior. A maior dificuldade está em poder comparar as parcelas (subdivisões) centrais, especialmente se elas são mais de uma (caso da questão 4, onde são duas). As parcelas que podem ser vistas, com uma certa facilidade, são as que estão nos extremos: nesse caso seriam os brancos europeus, que se destacam nos países 5, 6 e 7, e os ameríndios, que se destacam nos países 1 e 2 apenas. A complexidade da análise é produto, primeiro, das quatro subdivisões internas, que dificultam a leitura, e, segundo, da necessidade de conhecimentos geográficos prévios, o que não foi o caso das questões 1 e 2. Isso significa que, por melhor que fosse a leitura matemática do gráfico, se o candidato não soubesse quais são as particularidades da composição étnica dos países do gráfico, a resposta seria impossível.

Na questão 3, seguindo a mesma lógica de observar os extremos, vemos que a população pobre teve uma parcela da renda nacional decrescente, enquanto a população mais rica aumentou a sua parcela da renda nacional, entre 1960 e 1990. Essa questão se assemelha às duas primeiras, ou seja, ela dispensa o conhecimento de conceitos geográficos, já que pode ser respondida por um simples raciocínio matemático, analisando-se a proporção das barras. Primeiramente devemos notar os extremos, nesse caso os 50% mais pobres e os 10% mais ricos, respectivamente as barras mais curtas e mais longas. Observando-se a sua evolução chegamos facilmente à conclusão sobre a sua estabilidade, melhoria ou agravamento, o que permite responder a questão.

3 — Gráficos de Linhas

Em sua maior parte são gráficos cartesianos simples, sendo ideais para representar séries cronológicas de fenômenos geográficos. Eles mostram, de forma clara, quanto aumentou ou diminuiu o fenômeno estudado no período em análise. A representação por linhas é recomendada quando se tem certeza de que a evolução entre os seus pontos teve uma progressão contínua. Observe os exemplos:

QUESTÃO 5 (VUNESP)

No Brasil, o desemprego é um dos maiores problemas enfrentados pela população. Pesquisas da Fundação Seade e do Dieese mostram que na região metropolitana de São Paulo a taxa de desemprego atingiu, em maio de 1996, nível record de 16,2%, totalizando 1.363.000 pessoas, em idade ativa, sem trabalho.

Pelas informações do gráfico, conclui-se que:

a) a elevação da taxa de desemprego foi sempre contínua no período considerado.
b) os meses correspondentes ao ano de 1995 apresentaram as maiores taxas de desemprego.
c) os meses de agosto/95 e janeiro/96 foram os que apresentaram os maiores índices de desemprego.
d) o último trimestre considerado revela as menores taxas de desemprego do período.
e) a taxa de desemprego acelerou-se abruptamente no último quadrimestre do período considerado.

QUESTÃO 6 (UFMG, adaptada)

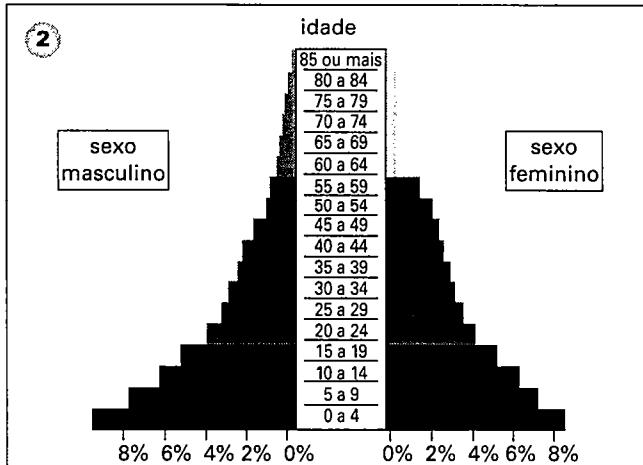
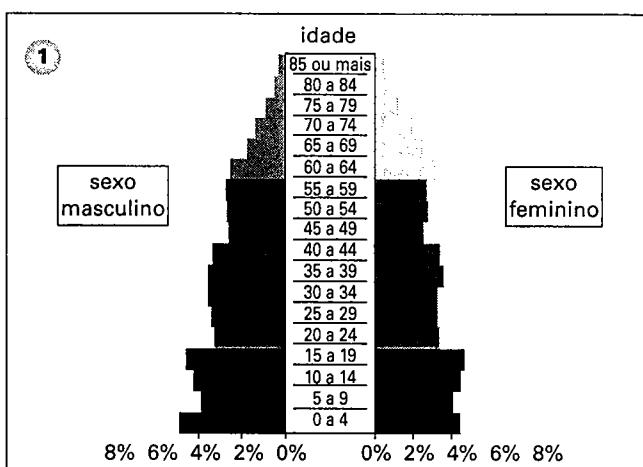
O gráfico mostra a distribuição anual de alguns elementos do clima de Irecê, importante área agrícola do interior baiano. É evidente a necessi-

dade da adoção de técnicas de irrigação para garantir a produção e a produtividade agrícola da região. Observe:

Fonte dos dados: Instituto Nacional de Meteorologia (1961-1990)

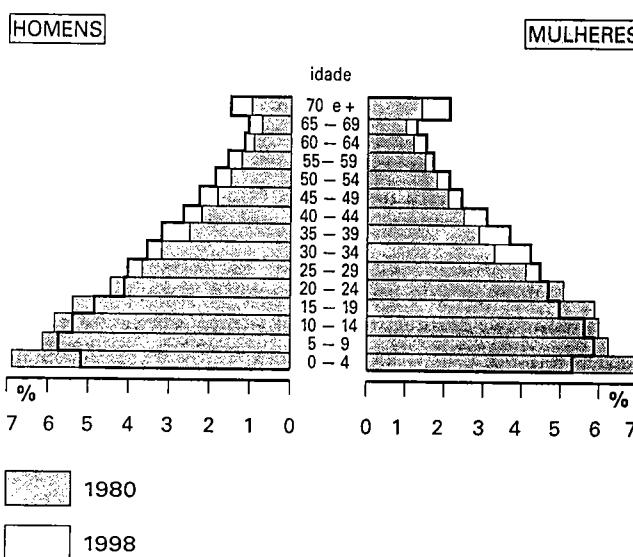
A partir da análise do gráfico, responda quando a irrigação deve ser utilizada na região. Por quê?

Os gráficos de linhas, em geral, são fáceis de serem entendidos. Servem muito bem para indicar os picos do fenômeno representado e a sua evolução ao longo do período em estudo. Indicam ainda tendências (crescimento, estabilização ou queda). Esse é o caso do gráfico da questão 5, que mostra o crescimento do desemprego na Grande São Paulo, relatando a sua evolução, com as oscilações do período. Não é o caso do gráfico da questão 6, muito mais complexo. Quando existe mais de uma linha, deve-se verificar com cuidado se os fenômenos representados têm correlação direta ou inversa entre si. No caso vemos que a queda das precipitações é acompanhada por um aumento da evaporação e por uma redução da umidade relativa do ar. A interpretação correta desses fatos é essencial para a criação de uma resposta correta.

4 — Os Histogramas

Os histogramas são gráficos que representam a distribuição de freqüência de um fenômeno, permitindo uma análise visual de seu comportamento. Geralmente são representados por barras ou colunas, organizadas das mais diferentes formas. O comprimento das barras ou colunas, ou mesmo a sua ausência, indicam a freqüência do fenômeno representado.

Um dos usos mais comuns desse tipo de gráfico, na Geografia, ocorre com as pirâmides etárias. Nelas estão representadas as estruturas da população quanto ao sexo e a idade. A partir de uma tabela com a idade de toda a população, dividida segundo o sexo masculino e feminino, organiza-se cada uma das faixas etárias, geralmente de 4 em 4 anos (opção mais comum no Brasil e na maior parte dos países do mundo). Com os valores obtidos monta-se então a pirâmide, empilhando as barras de diferentes tamanhos, que representam cada faixa de idade. O tamanho de cada um desses degraus é influenciado pelas taxas de natalidade e mortalidade do local, além do saldo de migrações, variando também ao longo do tempo. Observe os exemplos:

QUESTÃO 7 (Cesgranrio)

Observando-se as pirâmides etárias abaixo, pode-se concluir que:

a) a pirâmide 1 traduz a estrutura etária de idade e sexo de um país desenvolvido do tipo europeu ocidental, e a 2 a estrutura de um país subdesenvolvido do tipo latino-americano.
b) a pirâmide 1 representa a estrutura de idades e sexo típica de países africanos, com altas taxas de mortalidade infantil.
c) as duas pirâmides representam estruturas de países nos quais os adultos são mais numerosos do que os jovens de até vinte anos somados aos idosos de mais de sessenta anos.
d) a pirâmide 2 é típica de países europeus e do Japão, que vem implementando fortes políticas de expansão da natalidade após a Segunda Guerra Mundial.
e) a pirâmide 2 se aplica aos países socialistas e a pirâmide 1 a corresponde, mais proximamente, à estrutura de países capitalistas subdesenvolvidos.

QUESTÃO 8 (PUC-SP - modificada)

Observe e compare os gráficos a seguir, sobre a composição etária do Brasil:

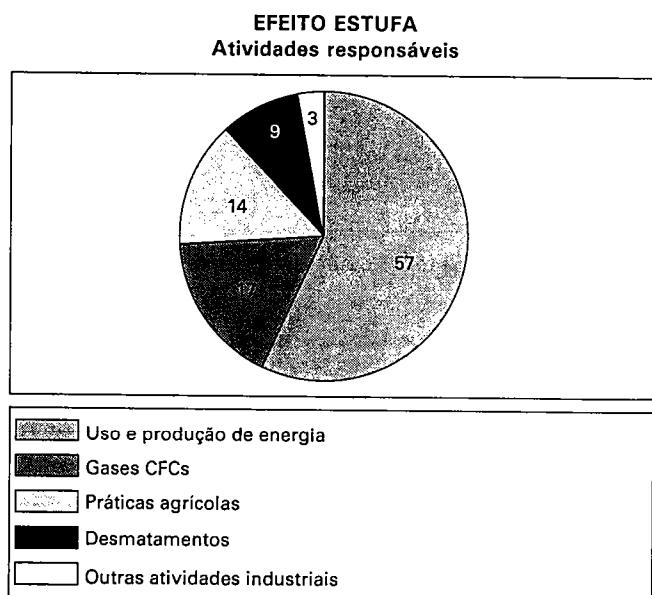
BRASIL: POPULAÇÃO POR SEXO E IDADE — 1980/1998

Fonte: IBGE (1983, 2000)

Assinala a alternativa **incorreta**:

a) O fato de uma grande parte da população viver atualmente em centros urbanos não contribuiu para a diminuição das taxas de natalidade.
b) A diminuição das taxas de natalidade, verificada pela diminuição do número de jovens, indica igualmente queda da taxa de fecundidade.
c) ocorreu aumento da expectativa de vida no período 1980-1998, indicando aumento do número de idosos.
d) a ampliação de práticas anticonceptivas, seja por métodos reversíveis, seja pela esterilização feminina, contribuiu para baixar a taxa de natalidade.
e) houve diminuição do número de jovens entre 1980 e 1998, indicando queda da taxa de natalidade.

Se a pirâmide se destina à comparação, seja com a de outros países ou regiões (questão 7), seja com a de outras épocas (questão 8), a melhor forma de representação das quantidades é a percentual. As pirâmides, de forma geral, permitem observar a proporção de cada faixa etária e seu sexo, comparando-a com a do sexo oposto ou com as outras faixas etárias.

No caso da questão 7 notamos que a base da pirâmide 1 (até 19 anos), que corresponde aos países desenvolvidos, é bem mais estreita que a da pirâmide 2. Isso indica uma menor parcela de jovens na população (algo em torno de 4% por faixa etária e por sexo), fato que é determinado pela queda da taxa de natalidade, fenômeno social típico desse grupo de países. Repare também que o ápice (população acima de 60 anos) da pirâmide 1 é bem mais largo que o da 2, o que indica uma parcela maior de idosos. Esse fato é determinado por uma melhor condição de vida e uma conseqüente ampliação da expectativa de vida. Verificamos assim que as pirâmides etárias podem ser comparadas, permitindo análises da situação demográfica, social e, por dedução, da situação sócio-econômica.

No caso da questão 8 vemos um outro uso interessante das pirâmides etárias. As pirâmides etárias de um lugar, mas de duas épocas diferentes, foram sobrepostas, permitindo a observação do que ocorreu com cada sexo em cada faixa etária desde 1980 até 1998. De forma geral podemos notar que a população jovem (menor que 19 anos) sofreu uma redução, enquanto a população adulta e idosa foi sendo ampliada. Esses dados permitem que se visualize a transformação pela qual a população brasileira está passando, que está evoluindo de excessivamente jovem para uma fase mais madura.

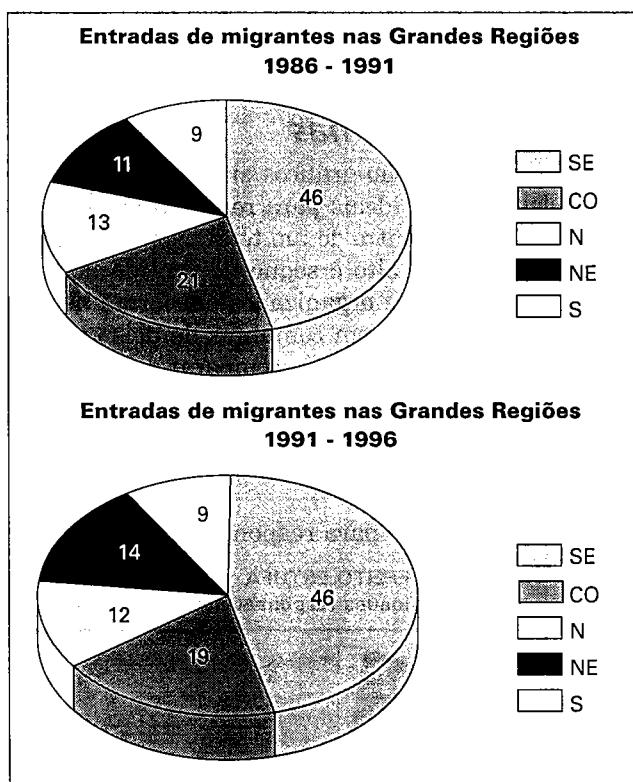
5 — Os Setogramas

Os setogramas são gráficos simples, geralmente de fácil leitura. São ideais para representar as participações relativas dentro de um total. Normalmente a divisão inicia-se no alto e segue no sentido horário, com os vários setores organizados em forma decrescente. Quando usados em conjuntos de dois ou mais setogramas podem servir para comparar diferenças de um mesmo fenômeno ou sua distribuição pelo espaço ou tempo. Veja alguns exemplos:

QUESTÃO 9 (GV)

Observe o gráfico para responder à questão:

EFEITO ESTUFA
Atividades responsáveis

Fonte: Aquecimento global — O relatório do Greenpeace. Rio de Janeiro, FGV, 1992.

O conteúdo do gráfico permite-nos concluir que os países que contribuem para a intensificação do

efeito estufa e, portanto, para o aquecimento da atmosfera são aqueles que mais:

a) consomem produtos industrializados, como o Japão e o Brasil.
b) consomem energia no mundo, a exemplo dos Estados Unidos e Canadá.
c) produzem mais petróleo como os países do Oriente Médio: o Irã e o Iraque.
d) produzem carvão como os Estados Unidos, Inglaterra e Ucrânia.
e) desmataram as florestas e realizaram grandes cultivos mecanizados como o Brasil e Canadá.

QUESTÃO 10 (VUNESP)

Compare os dois gráficos que representam as entradas de migrantes nas regiões brasileiras:

Fonte: IBGE, Contagem da População de 1996.

O aumento registrado nas entradas de migrantes na Região Nordeste tem como causa principal:

a) declínio no crescimento vegetativo da população nordestina.
b) retorno de muitos nordestinos para seus estados de origem.
c) êxodo rural intensificado pelo agravamento da seca no Sertão Nordestino.
d) frentes de trabalho criadas pelo governo nas áreas de agricultura irrigada.
e) programa de redistribuição de terras ao redor dos grandes açudes.

Repare que no caso da questão 9 o efeito visual do gráfico foi reforçado pela colocação dos valores correspondentes de cada setor, facilitando a sua leitura e compreensão. O gráfico deixa claro que a participação relativa do uso e produção de energia no efeito estufa é muito marcante, o que facilitou a escolha da resposta (onde se afirma que a intensificação do efeito estufa se deve aos países que consomem mais energia).

A questão 10 parece, à primeira vista, mais complexa. Sua análise, no entanto, revela uma questão simples: entre 1986 e 1991, a região Nordeste recebeu 11% dos migrantes brasileiros, e entre 1991 e 1996, essa percentagem saltou para 14%. A pergunta é, na sua essência, qual é o motivo desse aumento. O gráfico apenas ilustra o fato, mas não responde a questão.

Respostas

1 — Noções Espaciais

1. C
2. a) hemisfério Norte ou Setentrional
   b) hemisfério Sul ou Meridional
3. C (Intertropical)
4. O ponto de encontro de um paralelo com um Meridiano
5. 1 = Círculo Polar Ártico
   2 = Trópico de Câncer
   3 = Equador
   4 = Trópico de Capricórnio
   5 = Círculo Polar Antártico
6. a) Manaus-Aracaju
   b) Brasília-Cruzeiro
7. a) Lat. 40ºN
   Long. 120º0
   b) Lat. 40ºS
   Long. 180º0
   c) Lat. 40ºS
   Long. 60º0
   d) Lat. 40ºN
   Long. 60ºL
   e) Lat. 80ºN
   Long. 120ºL
8. A = 8h
   B = 4h
   D = 20h
   E = 24h
9. A = Temperada Norte
   B = Temperada Sul
   C = Temperada Sul
   D = Temperada Norte
   E = Glacial Ártico
10. A = 7h
    B = 16h
    C = 17h
    D = 24h
    E = 17h

2 — O Uso de Gráficos na Geografia

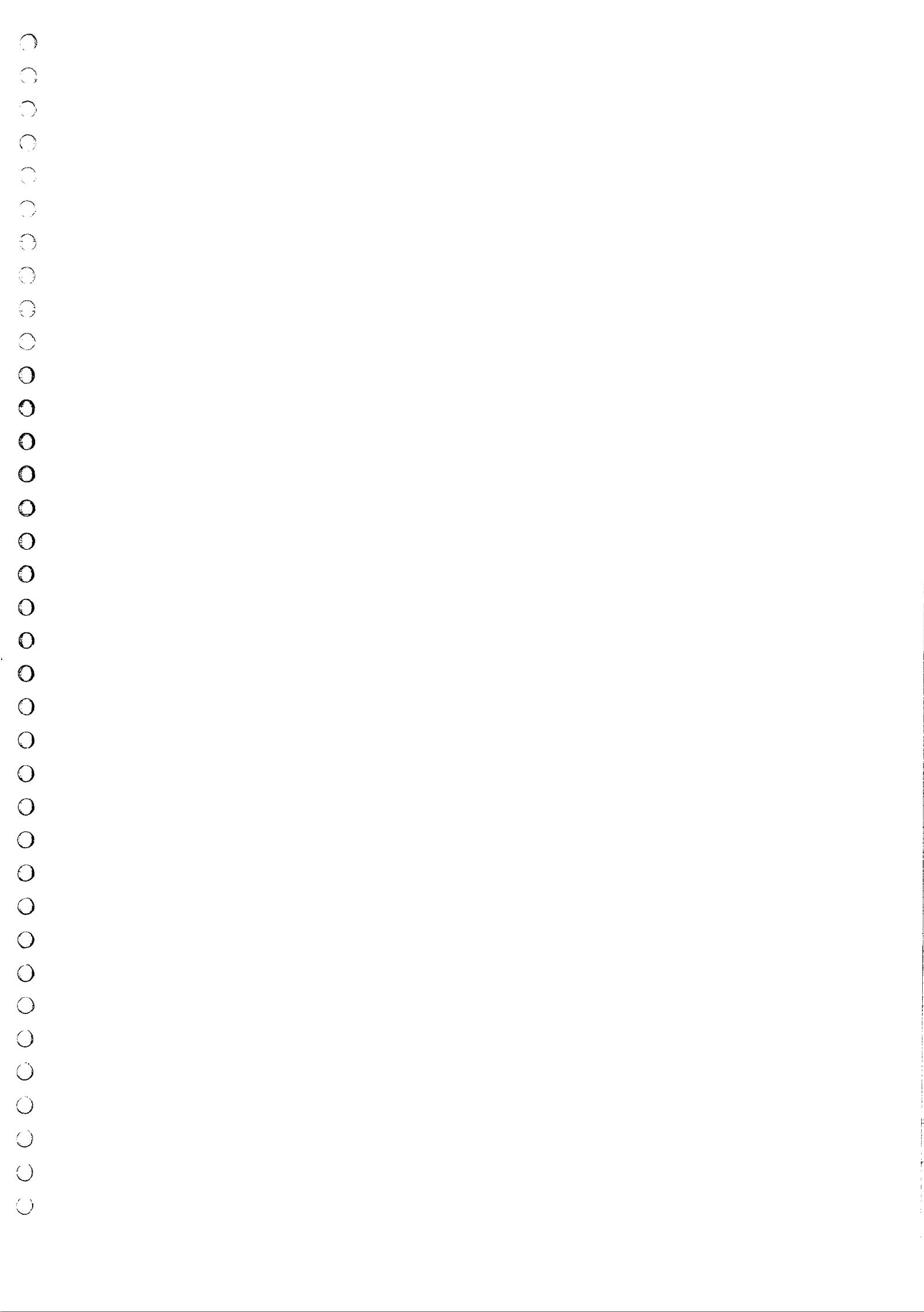
1. B
   O gráfico deixa claro que as piores condições de trabalho estão na Região Nordeste, onde 25% da população trabalhadora recebe menos que 1 salário mínimo. O mesmo raciocínio, de base quantitativa, mostra que no Sudeste há a menor parcela nacional de trabalhadores nessa situação, o que indica melhores condições de vida e melhores salários nessa região. Foi esse raciocínio quantitativo que permitiu a escolha da resposta correta, que aponta o Sudeste como região pólo de atração de pessoas que almejam melhores salários. Vejamos porque as demais alternativas poderiam ser eliminadas: A – a região Sul não tem o menor valor porcentual de pessoas com rendimento inferior a um salário mínimo; C — o Centro-Oeste não é a região com o mais elevado percentual de pessoas com rendimento inferior a um salário mínimo; D — a região Nordeste não é um pólo de atração para as pessoas que buscam melhores salários, já que é a de maior concentração de trabalhadores com rendimentos inferiores a um salário mínimo; E — a região Norte não é a que apresenta o segundo maior percentual de pessoas recebendo um salário mínimo.
   Vemos, por essas explicações, que a questão não exigiu nenhum conhecimento geográfico do candidato. Tratava-se, essencialmente, a uma análise quantitativa: avaliou-se apenas a capacidade do candidato em interpretar corretamente os dados da questão.
2. D
   A questão é semelhante à anterior e também não exigia nenhum conhecimento específico de Geografia. O gráfico é menos preciso que o anterior, pois os valores de cada coluna não estão especificados e têm que ser deduzidos pelo eixo da percentagem. Para encontrar a resposta bastaria somar o total de exportações do Sudeste (mais ou menos 58%) com a do Sul (mais ou menos 24%), verificando que juntas são responsáveis por mais de 80% do valor das exportações brasileiras. Vejamos porque as demais alternativas poderiam ser eliminadas: A — a região Sul não é responsável por metade das exportações brasileiras, mas sim por mais ou menos 24%; B — as regiões Sul, Nordeste, Norte e Centro-Oeste não são responsáveis por mais de 50% do valor das exportações brasileiras, já que o Sudeste sozinho exporta mais de 50%; C — os maiores responsáveis pelo valor das exportações brasileiras são o Sudeste e o Sul e não o Norte e Nordeste; E — as regiões Centro-Oeste, Norte e Nordeste não são responsáveis por 50% do valor das exportações brasileiras, já que o Sudeste sozinho exporta mais de 50%.

3. E
A alternativa correta utiliza (de forma certa para esse tipo de assunto e gráfico), a análise dos seus extremos, afirmando que há um agravamento da situação, do segmento mais pobre, pois sua participação na renda nacional decresce em favor do segmento mais rico. Isso pode ser visto facilmente nas barras, pela redução do tamanho da subdivisão com a legenda de mais pobres e com o aumento proporcional da subdivisão dos mais ricos. Vejamos porque as demais alternativas poderiam ser eliminadas: A — a variação do tamanho de cada uma das subdivisões das barras ao longo dos anos mostra que não há estabilidade; B — não há melhoria do conjunto, já que os extremos indicam perdas dos pobres e ganhos dos ricos; C — o segmento intermediário (de difícil observação, como já dissemos) está praticamente estável; D — os pobres, somados aos intermediários, tiveram, mas já não têm, 50% da renda nacional, portanto não há constância em sua participação.

4. C
Para responder corretamente não bastaria uma análise quantitativa correta. A forma mais objetiva de chegar à alternativa correta seria o conhecimento de que a Costa Rica tem a predominância absoluta de população de etnia branca, o que está representado no gráfico pela coluna 6. A única alternativa que coloca esse país na posição correta é a C.

5. E
O gráfico indica claramente um aumento da taxa de desemprego a partir de janeiro de 1996, saltando de cerca de 13% para 16,2%. Isso indica uma aceleração do fenômeno, bem descrita na alternativa correta. As demais alternativas estão incorretas devido: A — a elevação da taxa de desemprego não foi contínua, pois o gráfico mostra dois períodos em que ela teve redução; B — os valores apontados pelo gráfico para o ano de 1995 são menores que os de 1996; C — os meses apontados são os que tiveram os menores e não os maiores índices de desemprego; D — o último trimestre é o de maiores e não menores taxas de desemprego.

6. A irrigação deve ser utilizada na região entre os meses de maio e agosto. Durante esse período os índices de precipitação estão próximos a zero, além disso a evaporação aumenta e a umidade relativa do ar diminui, o que impossibilitaria a produção agrícola sem irrigação.

7. A
A pirâmide 1, quando comparada à 2, mostra uma a base estreita, o que indica a pequena parcela de jovens (até 19 anos), fruto das baixas taxas de natalidade. Mostra ainda uma população idosa (maior que 60 anos) numerosa, produto de uma elevada expectativa de vida. Tais aspectos são típicos de países desenvolvidos, numerosos na Europa ocidental. Já a pirâmide 2, é típica de países subdesenvolvidos, como os da América Latina, pois têm a base larga, indicando elevadas taxas de natalidade, e o ápice estreito, o que indica uma baixa expectativa de vida.

8. A
A redução da parcela de jovens (menores que 19 anos) é evidente da figura. A sua causa direta foi a queda da taxa de natalidade, ocorrida no Brasil no período retratado pela pirâmide. Por sua vez, essa queda da taxa de natalidade foi produto das profundas transformações dos hábitos urbanos e do comportamento da natalidade da população brasileira, fatos diretamente associados à urbanização. Esse fato não foi apontado corretamente na alternativa A, mas surge claramente exposto nas alternativas B, D e E. A alternativa C analisa corretamente o que ocorreu na faixa etária dos idosos (maiores que 60 anos), onde o gráfico mostra a ocorrência de um aumento da população.

9. B
A resposta é relativamente fácil para quem conhece o conceito de efeito estufa e sabe que sua intensificação está vinculada principalmente à queima de combustíveis fósseis, produtores de dióxido de carbono. Esse processo é mais intenso nos países industrializados que dependam de usinas térmicas e portanto produzam energia por esse meio (queima de carvão e derivados de petróleo). O gráfico deixou claro que o principal responsável pelo efeito estufa é o uso e a produção de energia, portanto a resposta está vincula aos Estados Unidos e Canadá, países mais industrializados.

10. B
É um exemplo de questão onde o gráfico de nada ajuda na resposta. O candidato tinha que saber que o aumento de migrantes para o Nordeste, que saltou de 11% do total nacional para 14%, deveu-se, naquele período, ao retorno de muitos nordestinos aos seus estados de origem.